UNIVERSITÄT WÜRZBURG
MATHEMATISCHES INSTITUT
Prof. J. Steuding

Wintersemester 07/08
22.10.2007

1 . Tutorium zur Analysis III

1.1 Es sei X eine Menge. Überlegen Sie ob die folgenden Mengensysteme σ-Algebren sind.

a) $\mathcal{A} := \{A \subset X \,|\, A \text{ endlich oder } X \setminus A \text{ endlich}\}$.

b) $\mathcal{B} := \{B \subset X \,|\, B \text{ abzählbar oder } X \setminus B \text{ abzählbar}\}$.

1.2 Es sei X eine Menge und $\mathcal{P}(X)$ ihre Potenzmenge.

a) Ist $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ eine σ-Algebra, dann gilt

$$A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}.$$

b) Der Durchschnitt beliebig vieler σ-Algebren ist eine σ-Algbera.

c) Ist die Vereinigung zweier σ-Algebren eine σ-Algebra?
Hinweis: Betrachte $X = \{1, 2, 3\}$.

Aufgabe 1.1:

a) Ist X endlich, dann ist $P(X) = \mathcal{A}$

$\Longrightarrow$ $\mathcal{A}$ ist σ-Algebra.

~~BzA~~ Falls $|X| = \infty$, dann ist $\mathcal{A}$ keine σ-Algebra.

Beweis: Ann: $\mathcal{A}$ ist σ-Algebra.

Betrachte abzählbare Teilmenge

$B := \{b_1, b_2, b_3, \dots\}$ ~~mit~~ mit $|B| = \infty$.

Dann ist $B_1 := \{b_1, b_3, b_5\}$ ~~da~~ $= \bigcup_{i \in \mathbb{N}} b_{2i-1} \in \mathcal{A}$

sowie $B_2 := \{b_2, b_4, \dots\} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} b_{2i} \in \mathcal{A}$.

Aber: weder B_1 und $X \setminus B_1$ sind endlich (da $B_2 \subseteq X \setminus B_1$).

b) $\boxed{1.1}$

Zur Erinnerung:

① Vereinigung abzählbarer Mengen ist abzählbar

abzählbare

② $X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_i = \bigcap_{n=1}^{\infty} (X \setminus A_i)$ De Morgan.

$\mathcal{B}$ ist eine σ-Algebra, denn

① $\forall A \in \mathcal{B}$ ist $X \setminus A \in \mathcal{B}$

② z.z.: $\forall A_1, A_2 \ldots \in \mathcal{B}$ ist $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{B}$.

1\. Fall: Alle A_i abzählbar $\Longrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_i$ abzählbar

2\. Fall $\exists i$ so dass $X \setminus A_i$ abzählbar:

Dann ist $X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \overset{}{\underset{\text{De Morgan}}{=}} \bigcap_{n=1}^{\infty} (X \setminus A_n) \subseteq X \setminus A_i$

$\Longrightarrow$ abzählbar. ∞

Fazit: $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{B}$

1.2

a) Sei $\mathcal{A} \subset P(X)$ eine σ-Algebra.

~~⇒ Da~~ zu $A_1, A_2, A_3 \dots \in \mathcal{A}$ ist

$\Rightarrow X\setminus A_1,\ X\setminus A_2,\ X\setminus A_3 \dots \in \mathcal{A}$

$\Rightarrow \bigcup_{i\in\mathbb{N}} X\setminus A_i \in \mathcal{A}$

$\qquad \|$

DE MORGAN

$\Rightarrow X\setminus\left(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) \in \mathcal{A}$

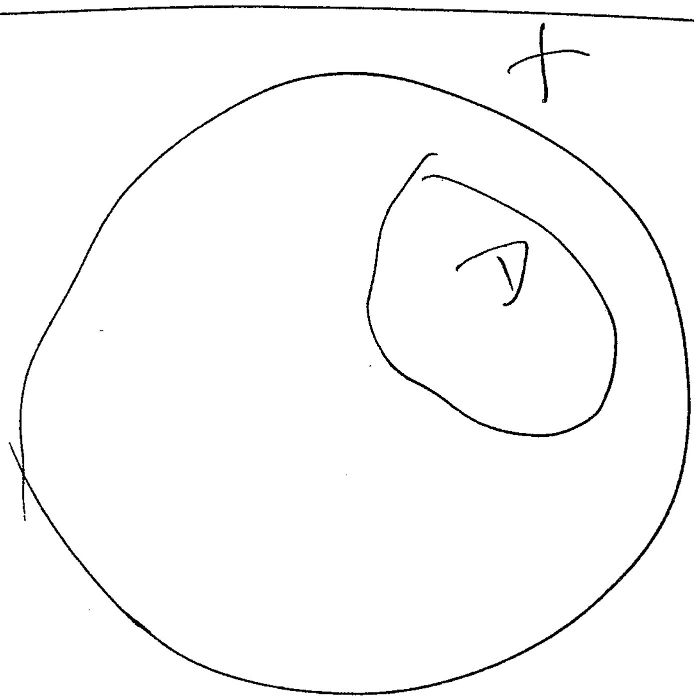
$\Rightarrow \bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$

$A \in \mathcal{A}$

$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \Rightarrow$

$\tilde{A} = \{a_n, \dots\}$

$\tilde{A} = X\setminus A$



$A \subset X$

1.2

b) Seien $\mathcal{A}_i \subseteq P(X)$, $i \in I$ σ-Algebren.

Betrachte $\mathcal{D} := \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i = \{A \in P(X) \mid A \in \mathcal{A}_i \ \forall i \in I\} \subseteq P(X)$

Ist $A \in \mathcal{D}$ dann ist $X \setminus A \in \mathcal{A}_i \quad \forall i \in I$

$$\Rightarrow X \setminus A \in \mathcal{D}$$

Sind $A_1, A_2, A_3 \dots$ in $\mathcal{D}$, dann ist

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}_i \quad \forall i \in I$$

Also

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{D}.$$

---

c) Nein.

z.B. sind $\mathcal{A} := \{\emptyset, \{1,2\}, \{3\}, X\}$

und $\mathcal{B} := \{\emptyset, \{1\}, \{2,3\}, X\}$

σ-Algebren, aber $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{3\}, \{2,3\}, X\}$

nicht, denn

$$\{1\} \cup \{3\} \notin \mathcal{A} \cup \mathcal{B}.$$

Universität Würzburg
Mathematisches Institut
Prof. J. Steuding, J. Jordan

Wintersemester 07/08
29.10.2007

2 . Tutorium zur Analysis III

2.1 (Meßbare Funktionen)

a) Es seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ meßbar. Zeigen Sie $x \mapsto \max\{f(x), h(x)\}$ ist meßbar.

b) Es seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ meßbar und $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie $h \circ f$ ist meßbar.

c) Es sei $V \subset \mathbb{R}$ eine nicht meßbare Menge (das es sowas gibt, wurde in der Vorlesung gezeigt). Konstruieren sie zwei nicht meßbare Funktionen $\alpha, \beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so dass $\alpha \circ \beta$ meßbar ist.

2.2 Diskutieren Sie folgende Argumentation:

(i) Zur Nullmenge $\mathbb{Q}$ gibt es zu jedem ϵ eine Folge offener Intervalle I_n, so dass

$$\mathbb{Q} \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n \quad \textit{und} \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(I_n) < \epsilon.$$

(ii) Zu jedem $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ gibt es ein $q \in \mathbb{Q}$, so dass q beliebig nahe an x liegt.
(iii) Daher ist für jede Folge I_n offener Intervalle mit $\mathbb{Q} \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$ auch $\mathbb{R} \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$.
(iv) Folglich ist $\mathbb{R}$ auch eine Nullmenge.

Lösungshinweise:
Aussage (i). ist wahr. Man nehme eine Abzählung $q_1, q_2, \ldots$ von $\mathbb{Q}$ und überdecke diese mit den Intervallen $I_n = (q_n - \epsilon 2^{-n-3}, q_n + \epsilon 2^{-n-3})$. Dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n) = \frac{\epsilon}{2}$.
Aussage (ii) ist auch wahr (siehe 1. Semester).
Aber aus (i) und (ii) folgt nicht (iii).
Sei I_n, $n \in \mathbb{N}$ eine Folge offener Intervalle mit $\mathbb{Q} \subset \bigcup I_n$, dann liegt zwar in jedem I_n auch ein Element aus $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ aber nicht jedes Element aus $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ muss in $\bigcup I_n$ liegen. Zum Beispiel wird ja mit $I_1 = (\sqrt{2} - \epsilon, \sqrt{2})$, $I_2 = (\sqrt{2}, \sqrt{2} + \epsilon)$ die Zahl $\sqrt{2}$ aber keine rationale Zahl in der Nähe ausgespart.
$\mathbb{Q}$ ist zwar abzählbar, aber man kann keine Abzählung finden, für die $q_1 < q_2 < q_3 \ldots$ gilt. Vollzieht man nun die Konstruktion aus (i) dann kann es Indizes n und $n+1$ geben, so dass zwischen q_n und q_{n+1} ein Abstand größer als $\epsilon 2^{-n-2}$ ist. Es muß also zwischen I_n und I_{n+1} weitere Intervalle der Folge geben. Wenn sich dieses Phänomen häuft, dann kann es am Ende *sehr viel mehr*[1] ausgesparte Punkte als überdeckte Punkte geben. [2]
Aus (iii) folgt sicher (iv). Das tut aber nichts zur Sache, weil (iii) falsch ist.

[1] sogar überabzählbar viele

[2] Eben weil wir beweisen können, dass abzählbare Mengen Nullmengen sind, wird dieses Phanomen für jede Abzählung von $\mathbb{Q}$ auftreten

2. Tutorium

a)

$$\mathbb{R} = \underbrace{\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) < g(x)\}}_{=: M_1} \dot{\cup} \underbrace{\{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \leq f(x)\}}_{=: M_2}$$

$M_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid (f-g)(x) < 0\}$ ← beide meßbar, da $f-g$ und $g-f$ meßbar!

$M_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid (g-f)(x) \leq 0\}$

Also ist

$$\phi : x \mapsto \max\{f(x), g(x)\} = \begin{cases} f(x) & x \in M_2 \\ g(x) & x \in M_1 \end{cases}$$

meßbar, denn

$$M_\alpha^\phi := \{x \in X \mid \phi(x) > \alpha\} = \{x \in M_1 \mid f(x) > \alpha\}$$
$$\cup \{x \in M_2 \mid g(x) > \alpha\}$$
$$= (M_1 \cap \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > \alpha\})$$
$$\cup (M_2 \cap \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) > \alpha)$$

alle meßbar.

---

b) Allgemein gilt: (i) $(h \circ f)^{-1}(M) = f^{-1}(h^{-1}(M))$

(ii) M offen in $\mathbb{R} \Longrightarrow M = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_i$ oder $\dot{\bigcup}_{i=1}^{n} I_i$

Ü-Aufgabe 2. tes Semester! →

mit I_i disjunkte offene Intervalle (eventuell unbeschränkt)

(iii) $f^{-1}(\bigcup A_i) = \bigcup f^{-1}(A_i)$

zu 24)

Also gilt:

$$M_a = \{x \in \mathbb{R} \mid h \circ f(x) > a\} = (h \circ f)^{-1}((a,\infty))$$
$$= f^{-1}(h^{-1}(a,\infty)) = f^{-1}\Big(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_i\Big) = \underbrace{\bigcup \underbrace{f^{-1}(I_i)}_{\text{alle meßbar}}}_{\text{meßbar.}}$$

oder $(i=1,\dots n)$

$\Longrightarrow (h \circ f)$ meßbar.

[Bemerkung: h, f meßbar $\not\Rightarrow$ $h \circ f$ meßbar.
(Gegenbeispiel aufwendig)

In anderen Büchern wird meßbar oft anders definiert (Nämlich Urbilder meßbarer Mengen sind meßbar) Dann gilt sogar: h, f meßbar $\Rightarrow$ $h \circ f$ meßbar.]

Jede Einelementige Menge ist meßbar (Maß 0)
$\Rightarrow \exists\, V_1, V_2 \in V$ mit $V_1 \neq V_2$.

c) Betrachte: $\chi_V : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \longmapsto \begin{cases} V_1 & x \in \mathbb{R}\setminus V \\ V_2 & x \in V \end{cases}$

Dann ist $\chi_V \circ \chi_V : x \longmapsto V_2$

Also ist $\{x \in \mathbb{R} \mid \chi_V \circ \chi_V(x) > \alpha\} = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{falls } \alpha > V_2 \\ \emptyset & \text{falls } \alpha \leq V_2 \end{cases}$

$\Longrightarrow \chi_V \circ \chi_V$ meßbar.

Universität Würzburg
Mathematisches Institut
Prof. J. Steuding, J. Jordan

Wintersemester 07/08
5.11.2007

3 . Tutorium zur Analysis III

3.1 a) Finden Sie zu $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f : x \mapsto \max\{z \in \mathbb{Z} \,|\, z \leq \frac{1}{x}\}$ eine Folgen von einfachen Funktionen, welche gegen f konvergieren und berechnen Sie das Integral $\int_{\mathbb{R}^+} f \, d\lambda$.

b) Finden Sie eine Folge einfacher Funktionen $f_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, welche punktweise gegen eine einfache Funktion konvergiert, für die aber gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_n \, d\lambda \neq \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{n\to\infty} f_n \, d\lambda.$$

c) Zeigen Sie: Ist $f \geq 0$ und $\int_A f d\lambda = 0$, dann gilt $f(x) = 0$ fast überall.

3.2 Es sei $\mathcal{F}(X)$ die Menge der auf X messbaren Funktionen $f : X \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass durch

$$f \sim g \quad :\Leftrightarrow \quad \mu(\{x \in X \,|\, f(x) \neq g(x)\}) = 0$$

eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{F}(X)$ definiert ist.

Lösungshinweis: Reflexivität und Symmetrie sind klar (wem das nicht klar ist, der hat Äquivalenzrelationen nicht verstanden und möge unbedingt das erste Semester nachholen).
Zur Transitivität: Seien $f, g, h \in \mathcal{F}(X)$. Es gilt

$$\{x \in X \,|\, f(x) \neq g(x)\} \subset \{x \in X \,|\, f(x) \neq h(x)\} \cup \{x \in X \,|\, h(x) \neq g(x)\},$$

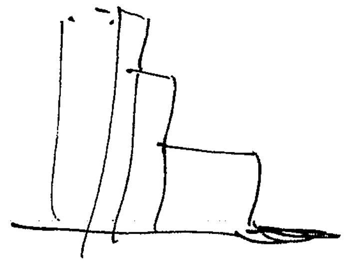
denn, $f(x) \neq g(x)$ impliziert, dass entweder $f(x) \neq h(x)$ oder $h(x) \neq g(x)$. Da die letzten beiden Mengen Nullmengen sind, ist auch $\{x \in X \,|\, f(x) \neq g(x)\}$ eine Nullmenge.

TUT 3

3.1) a) $f: x \mapsto \max\{z \in \mathbb{Z} \mid z \le \frac{1}{x}\} = [\frac{1}{x}]$

$$= \begin{cases} 0 & x > 1 \\ 1 & 1 \ge x > \frac{1}{2} \\ 2 & \frac{1}{2} \ge x > \frac{1}{3} \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

keine einfache Funktion



Betrachte: $$\varphi_n(x) := \begin{cases} 0 & x > 1 \\ \vdots & \\ k & \frac{1}{k} \ge x > \frac{1}{k+1} \\ \vdots & \\ n & \frac{1}{n} \ge x \end{cases} = \sum_{i=0}^{n} i\, \chi_{(\frac{1}{i+1}, \frac{1}{i}]}$$

Punktweise gilt $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) \to f(x)$

Für das Integral ergibt sich

$$\int_{\mathbb{R}^+} f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} i\, \mu\left(\left(\frac{1}{i+1}, \frac{1}{i}\right]\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i+1} = \infty$$

harmonische Reihe

b) Betrachte $\chi_{[n, n+1]}$

c) Sei $f \ge 0$, $\int_A f\, d\lambda = 0$

$$\underbrace{\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) > 0\}}_{B_0} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) > \frac{1}{n}\}}_{B_n}$$

Es gilt: $\mu(B) = 0 \Leftrightarrow \mu(B_n) = 0\ \forall n \in \mathbb{N}$.

An: $\exists n : \mu(B_n) \neq 0$

Dann: $$\int_A f\, d\lambda = \underbrace{\int_{A \setminus B_n} f\, d\lambda}_{\ge 0} + \underbrace{\int_{B_n} f\, d\mu}_{\ge \underbrace{\mu(B_n) \cdot \frac{1}{n}}_{> 0}} > 0 \quad ↯$$

3.2) Reflexivität + Symmetrie ist klar.

Transitivität: $\{f(x) \neq h(x)\} = \mathbb{R}^n \setminus \{f(x) = h(x)\} \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \{f(x) = g(x) = h(x)\}$

$= \mathbb{R}^n \setminus (\{f(x) = g(x)\} \cap \{g(x) = h(x)\})$

$= \mathbb{R}^n \setminus \{f(x) = g(x)\} \cup \mathbb{R}^n \setminus \{g(x) = h(x)\}$

$= \{f(x) \neq g(x)\} \cup \{g(x) \neq h(x)\}$ 0-Mengen!

$f_n(x) = \sqrt[n]{1-x^2}$

$f_{n+1}(x) = \sqrt[n+1]{1-x^2} \geq f_n(x)$

$\in [0,1]$

UNIVERSITÄT WÜRZBURG
MATHEMATISCHES INSTITUT
Prof. J. Steuding, J. Jordan

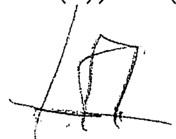
Wintersemester 07/08
12.11.2007

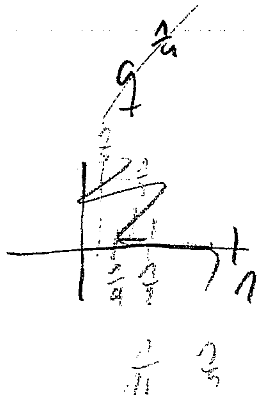
$\sqrt[2]{\tfrac{1}{2}} < \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}}$

4 . Tutorium zur Analysis III

4.1 Existieren die Limites und wenn ja, was ist Ihr Wert?

$$a) \quad \lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} \sqrt[n]{1-x^2}\, d\lambda(x); \qquad b) \quad \lim_{n\to\infty} \int_{[0,\pi]} (2\sin(x))^n\, d\lambda(x).$$





4.2 Gegeben sei die Funktionenfolge

$$f_k : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} k & \text{falls } x \in I_k := [\frac{1}{k^2}, \frac{1}{k}], \\ 0 & \text{falls } x \in [0,1] \setminus I_k. \end{cases}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

a) Zeigen Sie, dass die Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen die Nullfunktion $f \equiv 0$ konvergiert.

b) Finden Sie eine (möglichst einfache) Majorante g zu f_k, d.h. eine Funktion $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, so dass $f_k(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [0,1]$ gilt.

c) Zeigen Sie: $\lim_{k\to\infty} \int_{[0,1]} f_k\, d\lambda \neq \int_{[0,1]} f\, d\lambda$. Warum widerspricht dies nicht dem Satz von der majorisierten Konvergenz?

$\frac{n}{(n+1)^2}$

: Loesungshinweis:

a) $f_k(0) = 0$ und für alle $x \in]0,1]$ ist $f_k(x) = 0$ falls $k > \frac{1}{x}$.

b) Definiere $g(x) = \frac{1}{x}$ für $x \in]0,1]$ und $g(0) = 0$. Sei nun $k \in \mathbb{N}$ und $x \in [0,1]$ dann ist $f_k(x) = 0 \leq g(x)$ falls $x \in [0,1] \setminus I_k$ bzw. $f_k(x) = k \leq \frac{1}{x} = g(x)$ falls $x \in I_k$.

c) Es ist

$$\lim_{k\to\infty} \int_{[0,1]} f_k\, d\mu = \lim_{k\to\infty} k(\frac{1}{k} - \frac{1}{k^2}) = 1 \neq 0 = \int_{[0,1]} f\, d\mu$$

Dies ist kein Wiederspruch zum Satz von der majorisierten Konvergenz, da g nicht über $[0,1]$ integrierbar ist.

$n\frac{(n-1)}{n^2}$

$(1 - \frac{1}{n}) \to 1$

(4,1) a) $f_n \geq 0$, meßbar, $\forall x \in [0,1):$ $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$

$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1$. $\xrightarrow{\text{Satz von der monotonen Konvergenz (SATZ 5.1)}}$ $\lim \int \ldots = 1$

b) $\int_{[0,\pi]} = \underbrace{\int_{[0,\frac{\pi}{6}]}}_{\to 0} + \underbrace{\int_{[\frac{\pi}{6}, \pi - \frac{\pi}{6}]}}_{\to \infty} + \underbrace{\int_{[\pi - \frac{\pi}{6}, \pi]}}_{\to 0} = \infty$

SATZ ÜBER MONOTONE KONVERGENZ

Grenzwertsätze: (Beppo Levi 1906)

$A \subseteq X \subseteq \mathbb{R}^d$

Satz über die monotone Konvergenz:

$A \subseteq \mathbb{R}^d$ meßbar, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$: $f_n : X \to \mathbb{R}$

- nichtnegativ ($f_n(x) \geq 0 \quad \forall x$)
- meßbar ($f^{-1}([a, \infty))$ meßbar)
- monoton wachsend $f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

DANN GILT:

$$\lim_{n \to \infty} \int_A f_n \, d\lambda = \int_A \underbrace{\lim_{n \to \infty} f_n}_{\text{existiert!..}} \, d\lambda$$

Satz von der majorisierten Konvergenz: $A \subseteq X \subseteq \mathbb{R}^d$ (Lebesgue 1910)

$A \subseteq \mathbb{R}^d$ meßbar. $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$: $f_n : X \to \mathbb{R}$

mit ① $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$ (für fast alle $x \in A$)

② Es ex. $g : X \to \mathbb{R}$ λ-integrierbar.

mit $|f_n(x)| \leq g(x)$ (für f.a. $x \in A$)

Dann gilt:

- f und f_n, $n \in \mathbb{N}$ sind alle λ-integrierbar. (d.h. $\int_A g \, d\mu < \infty$ ex. und ist endlich)
- Es gilt: $\lim_{n \to \infty} \int_A f_n \, d\lambda = \int_A f \, d\mu$

Universität Würzburg
Institut für Mathematik
Prof. J. Steuding, J. Jordan

Wintersemester 07/08
19.11.2007

5 . Tutorium zur Analysis III

5.1 Es sei $X \subset \mathbb{R}^d$. Zur Erinnerung: Die Menge $\mathrm{Abb}(X) := \{f : X \to \mathbb{R}\}$ zusammen mit der Addition $f+g : x \mapsto f(x)+g(x)$ und der skalaren Multiplikation $\lambda \cdot f : x \mapsto \lambda \cdot f(x)$ bilden einen reellen Vektorraum.

a) Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{N} := \{f \in \mathrm{Abb}(X) \,|\, f(x) = 0 \text{ fast überall } \}$$

ein Unterraum von $\mathrm{Abb}(X)$ ist.

b) Es sei $\mathcal{L}$ ein Untervektorraum von $\mathrm{Abb}(X)$. Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{L}/\mathcal{N} := \{x + \mathcal{N} \,|\, x \in \mathcal{L}\}$$

zusammen mit der Addition $(f+\mathcal{N}) + (g+\mathcal{N}) := (f+g) + \mathcal{N}$ und der skalaren Multiplikation $\lambda \cdot (f+\mathcal{N}) := (\lambda \cdot f) + \mathcal{N}$ ein Vektorraum ist.

5.2 Zeigen Sie:

a) Für alle $t > 0$ gilt $f(t) = \int_0^\infty e^{-tx}\,dx = \frac{1}{t}$ und $f^{(n)}(t) = (-1)^n \frac{n!}{t^{n+1}}$.

b) Folgern Sie aus a), dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx = n!$.

$\boxed{5.1}$ a) klar – $0 \in \mathcal{N}$.

- Sei $\lambda \neq 0$: ~~...~~ $f \in N \Rightarrow \lambda f \in N$, denn

$$\lambda f(x) = 0 \iff f(x) = 0$$

- $f, g \in N \Rightarrow f + g \in N$, denn

$$\cancel{(f+g)(x) = 0 \iff f(x) + g(x) = 0}$$

$$\{x \in X \mid (f+g)(x) \neq 0\} \cancel{= \{x \in X \mid}$$
$$\subseteq \underbrace{\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}}_{\text{Nullmenge}} \cup \{x \in X \mid g(x) \neq 0\}$$

Nullmengen

$\Rightarrow f + g \in N$

---

b) (i) $N + (f + N) = f + N \quad \forall\, f + N \in \mathcal{L}/N$

$\Rightarrow$ ~~Es~~ Es gibt einen Nullvektor

(ii) Addition ist ~~..~~ eine ~~Gruppe~~ abelsche Gruppe

mit $(f + N) + (-f + N) = N$

~~(iii) Distributivgesetze: $(f+N) + (g+N)$~~

; etc

u.s.w!

5.2

a) – Nach Aufg 1 ist: $f(t) = \lim_{w\to\infty} \int_0^w e^{-tx}\,dx = \lim_{w\to\infty} \left[-\frac{1}{t} e^{-tx}\right]_0^w = \frac{1}{t}$

– Mit Induktion: $f'(t) = (-1)^1 \frac{1!}{t^{1+1}}$

$\text{I.A.: } f^{(n)}(t) = \frac{(-1)^n n!}{t^{n+1}}$

und $f^{(n+1)}(t) \overset{\delta}{=} (-1)^n \frac{n!(n+1)}{t^{n+2}} \cdot (-1) = \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{t^{n+2}}$

---

b) Sei $g_n(t,x): \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $(x,t) \mapsto x^n e^{-tx}$

Wir zeigen: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten die Bedingungen aus Satz 6.4. Damit folgt dann

$f'(t) = -\int_0^\infty x e^{-tx}\,dx$, ... INDUKTION ... $f^{(n)}(t) = (-1)^n \int_0^\infty x^n e^{-tx}\,dx$

Damit ist dann $\underline{\underline{f^{(n)}(1) = \frac{n! \cdot (-1)^n}{1}}} = \underline{\underline{(-1)^n \int_0^\infty x^n e^{-tx}\,dx}}$

Noch zu zeigen (siehe Satz 6.4)

1. Für alle $t \in \mathbb{R}^+$ ist $x \mapsto x^n e^{-tx}$ Lebesgue integrierbar.

Klar; ~~Folgt aus Stetigkeit und $x^n e^{-tx} \geq 0$ und~~

denn $\int_0^\infty x^n e^{-tx}\,dx = \underbrace{\int_0^R x^n e^{-tx}\,dx}_{<\infty} + \underbrace{\int_R^\infty x^n e^{-tx}}_{<\infty}$ für R so dass $e^{+tx} > x^n \; \forall x > R$ ...

2. $g_n(x)$ ist überall partiell ~~integrierbar~~ diff'bar

3. Für $t - t_0 = \varepsilon$, ist

$\left|\frac{g_n(x,t) - g_n(x,t_0)}{t - t_0}\right| = x^n \left|\frac{e^{-t_0 x}(e^{-\varepsilon x} - 1)}{\varepsilon}\right| = \cancel{\frac{x^n}{\varepsilon} e^{-t_0 x} \left(\frac{\sum (-\varepsilon x)^n}{n!}\right)}$

$= \cancel{G(x) := x^n e^{-t_0 x} \max_{\varepsilon \in [0, t_0 + \varepsilon]} \left(\sum_{t=0} \frac{(-\varepsilon)^{n-1} x^n}{n!}\right)}$

$= \underline{x^n e^{-t_0 x}} \left|\frac{e^{-\varepsilon x} - 1}{\varepsilon}\right|$, $\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{e^{-\varepsilon x} - 1}{\varepsilon} = \frac{-x}{1}$

$\Rightarrow |e^{-\varepsilon x} - 1| \leq 2x$ für ε klein

Universität Würzburg
Institut für Mathematik
Prof. J. Steuding, J. Jordan

Wintersemester 07/08
19.11.2007

6 . Tutorium zur Analysis III

6.1 Vergleichen Sie die Werte

$$\int_{[0,1]}\int_{[0,1]} f(x,y)d\lambda(y)\,d\lambda(x),\quad \int_{[0,1]}\int_{[0,1]} f(x,y)d\lambda(x)\,d\lambda(y)\ \text{ und }\ \int_{[0,1]^2} f(x,y)d\lambda(x,y)$$

für die Funktionen

$$a)\quad f(x,y) := \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},\qquad b)\quad f(x,y) := (1-xy)^3.$$

Lösungshinweis:

a) Für die iterierten Integrale ergeben sich,

$$\begin{aligned}\int_{[0,1]}\int_{[0,1]} f(x,y)d\lambda(y)\,d\lambda(x) &= \int_{[0,1]}\left[\frac{y}{x^2+y^2}\right]_{y=0}^{1} d\lambda(x)\\ &= \int_{[0,1]}\frac{1}{1+x^2}d\lambda(x)\\ &= [\arctan(x)]_0^1 = \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

und mit analoger Rechnung (nutze $f(x,y) = -f(y,x)$) $\int_{[0,1]}\int_{[0,1]} f(x,y)d\lambda(x)\,d\lambda(y) = -\frac{\pi}{4}$. f ist auf $[0,1]^2$ nicht integrierbar, dann sonst wäre ja nach dem Satz von Fubini

$$\int_{[0,1]}\int_{[0,1]} f(x,y)d\lambda(y)\,d\lambda(x) = \int_{[0,1]}\int_{[0,1]} f(x,y)d\lambda(x)\,d\lambda(y).$$

b) Da die Funktion positiv und stetig ist stimmen alle drei Ausdrücke nach Vorlesung überein.

c) Zusatzaufgabe: Sei

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{1}{y^2} & \text{falls } 0<x<y<1,\\ -\frac{1}{x^2} & \text{falls } 0<y<x<1,\\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}$$

Für die iterierten Integrale ergeben sich,

$$\begin{aligned}\int_{[0,1]}\int_{[0,1]} f(x,y)d\lambda(y)\,d\lambda(x) &= \int_{[0,1]}\left(\int_0^y \frac{1}{y^2}d\lambda(x) + \int_y^1 \frac{-1}{x^2}d\lambda(x)\right) d\lambda(y)\\ &= \int_{[0,1]}(\frac{1}{y}-0+1-\frac{1}{y})d\lambda(y) = 1\end{aligned}$$

und mit analoger Rechnung $\int_{[0,1]}\int_{[0,1]} f(x,y)d\lambda(x)\,d\lambda(y) = -1$. f ist auf $[0,1]^2$ nicht integrierbar, dann sonst wäre ja nach dem Satz von Fubini

$$\int_{[0,1]}\int_{[0,1]} f(x,y)d\lambda(y)\,d\lambda(x) = \int_{[0,1]}\int_{[0,1]} f(x,y)d\lambda(x)\,d\lambda(y).$$

6.2 Es sei $X \subset \mathbb{R}^d$ eine Menge mit Lebesgue Maß 1 und $f \in \mathcal{L}^1$ mit $f : X \to \mathbb{R}_0^+$.

a) Zeigen Sie, $\log(t) \leq t - 1$ für alle $t \in [0, \infty)$. (Hier setzen wir $\log(0) := -\infty$).

b) Zeigen Sie,

$$\int_X \log f \, d\lambda \leq \log \left(\int_X f \, d\lambda \right)$$

6.2 Es sei $X \subset \mathbb{R}^d$ eine Menge mit Lebesgue Maß 1 und $f \in \mathcal{L}^1$ mit $f : X \to \mathbb{R}_0^+$.

a) Zeigen Sie, $\log(t) \le t - 1$ für alle $t \in [0, \infty)$. (Hier setzen wir $\log(0) := -\infty$).

b) Zeigen Sie,
$$\int_X \log f \, d\lambda \le \log\left(\int_X f \, d\lambda\right)$$

a) Betrachte $F(t) = t - 1 - \log(t)$

$$F'(t) = 0 \iff t = 1$$
$$F'(t) < 0 \iff t \in [0,1)$$
$$F'(t) > 0 \iff t \in (1,\infty)$$

$\Rightarrow$ Minimum bei $t = 1$ $\Longrightarrow$ (d.h. $F(1) = 0$)

~~$\Rightarrow$ Für log.~~ Für alle $t \ne 1$ $F(t) \ge 0$

$$\iff t - 1 \ge \log(t)$$

b) Setze $t := \dfrac{f(x)}{\|f\|_1}$ $\quad\left(\text{Mit } \|f\|_1 = \int_X f(x)\, d\lambda(x)\right)$

$\boxed{\text{HINWEIS GEBEN!}}$!?

Wegen a): $\log\left(\dfrac{f(x)}{\|f\|_1}\right) \le \dfrac{f(x)}{\|f\|_1} - 1$

$$\Longrightarrow \log(f(x)) \le \frac{f(x)}{\|f\|_1} - 1 + \log\|f\|_1$$

$$\Longrightarrow \int \log(f(x))\, d\mu(x) \le \frac{1}{\|f\|_1} \int_X f(x)\, d\mu(x) - \int_X 1 \, d\lambda + \int_X \log\|f\|_1 \, d\lambda$$

"Jensensche" Gleichung" (Diesmal nicht von JORDAN aber von Jens)

$$= 1 - 1 + \log\|f\|_1 \int_X 1 \, d\lambda$$

$$= \log\|f\|_1 = \log \int_X f(x)\, d\lambda(x)$$

Universität Würzburg
Institut für Mathematik
Prof. J. Steuding, J. Jordan

Wintersemester 07/08
05.11.2007

7 . Tutorium zur Analysis III

7.1 Berechnen Sie das Volumen der Menge

$$M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in [0, 1], 0 \leq z \leq \exp(x + y)\}.$$

Lösungshinweis: Wir berechnen:

$$\begin{aligned}
\lambda(M) &= \int_{\mathbb{R}^3} \chi_M d\lambda \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{e^{x+y}} dz dy dx \\
&= \int_0^1 \int_0^1 e^{x+y} dy dx \\
&= (e-1) \int_0^1 e^x dx \\
&= (e-1)^2
\end{aligned}$$

7.2 Es seien $a, b > 0$ und $M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x/a)^2 + (y/b)^2 \leq 1\}$.

(a) Skizzieren Sie M für $a = 1$, $b = 2$.

(b) Bestimmen Sie $M_y := \{x \in \mathbb{R} : (x,y) \in M\}$ für $y \in \mathbb{R}$.

(c) Berechnen Sie das 2-dimensionale Volumen $\lambda_2(M)$ von M.

Lösung:
(a) Die Fläche wird von einer Ellipse umrandet.
(b) Gegeben $y \in \mathbb{R}$ ist $M_y = \{x \in \mathbb{R} : (x/a)^2 \leq 1 - (y/b)^2\}$. Es ist also $M_y = \emptyset$ für $|y| > b$, während für $|y| \leq b$

$$M_y = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq a\sqrt{1 - (y/b)^2}\}$$

ein Intervall der Länge $2a\sqrt{1-(y/b)^2}$ ist.

(c) Nach dem Prinzip von Cavalieri ist

$$\begin{aligned}
\lambda_2(M) &= \int_{\mathbb{R}} \lambda_1(M_y)\, d\lambda_1(y) = \int_{[-b,b]} 2a\sqrt{1-(y/b)^2}\, d\lambda_1(y) \\
&= \int_{-b}^{b} 2a\sqrt{1-(y/b)^2}\, dy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2ab\cos^2(u)\, du \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} ab(1+\cos(2u))\, du = \pi ab\,,
\end{aligned}$$

wobei zur Berechnung des Riemann-Integrals $y = b\sin(u)$, $dy = b\cos(u)\, du$ substituiert wurde.

Universität Würzburg
Institut für Mathematik
Prof. J. Steuding, J. Jordan

Wintersemester 07/08
10.12.2007

8 . Tutorium zur Analysis III

8.1 Es sei $0 < p < q$, $0 < a < b$ und

$$M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{y^2}{p} < x < \frac{y^2}{q} \text{ und } \sqrt{ay} < x < \sqrt{by}\right\}$$

a) Skizzieren Sie die Menge M.

b) Begründen Sie, dass die Abbildung

$$\Phi : (\mathbb{R}^+)^2 \longrightarrow (\mathbb{R}^+)^2, \quad (u,v) \mapsto (\sqrt[3]{uv^2}, \sqrt[3]{u^2v})$$

ein Diffeomorphismus mit Umkehrabbildung $(x,y) \mapsto (y^2/x, x^2/y)$ ist.

c) Zeigen Sie, dass $\Phi^{-1}(M)$ ein Rechteck ist.

d) Bestimmen Sie die Fläche der Menge M mit Hilfe der Transformationsformel.

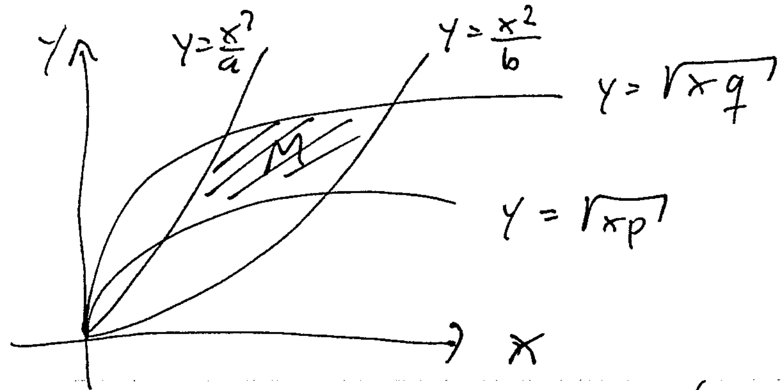
8.2 Es sei

$$M = \{z \in \mathbb{C}^* \mid |z| < \arg z\}.$$

Bestimmen Sie die Fläche von M. **Hinweis:** Polarkoordinaten!

8.1

a)

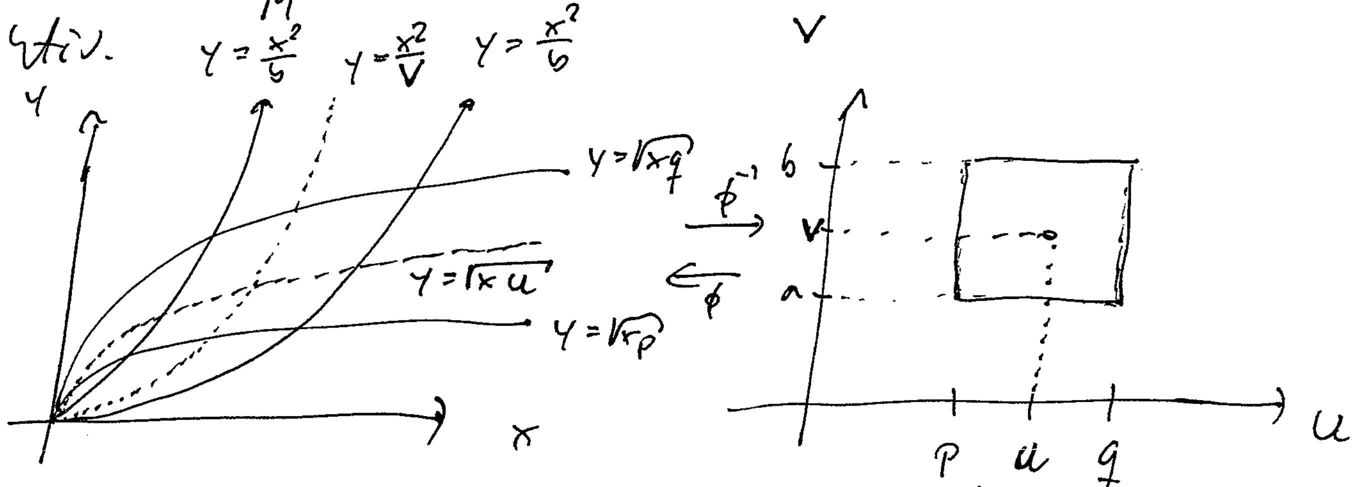


b) ~~...~~ Es gilt $\phi \circ \phi^{-1}(x,y) = \left(\sqrt[3]{\frac{y^2}{x}\left(\frac{x^2}{y}\right)^2}, \sqrt[3]{\left(\frac{y^2}{x}\right)^2 \frac{x^2}{y}} \right) = (x,y)$

$\Rightarrow$ ϕ ist bijektiv. Außerdem ist ϕ wie ϕ^{-1} diff'bar.

c) Es gilt: $\phi^{-1}\big|_M : M \to \phi(M) = Q = (p,q)\times(a,b)$ ist bijektiv.

Denn:



Wir zeigen: genau der Schnitt der ~~Graphen~~ Funktionen

$y = \frac{x^2}{v}$, $y = \sqrt{xu}$ wird auf (u,v) abgebildet,

$$\phi^{-1}(x,y) = \left(\frac{\left(\frac{x^2}{v}\right)^2}{x}, \frac{x^2}{\frac{x^2}{v}} \right) = (*, v) \Rightarrow$$ ~~v-Koordinate von $\phi^{-1}(x,y)$ in (a,b)~~

$$\phi^{-1}(x,y) = \left(\left(\frac{\sqrt{xu}}{x}\right)^2, * \right) = (u, *)$$

$\Rightarrow \phi^{-1}(M) = (p,q)\times(a,b)$

d) Mit der Transformationsformel gilt nun

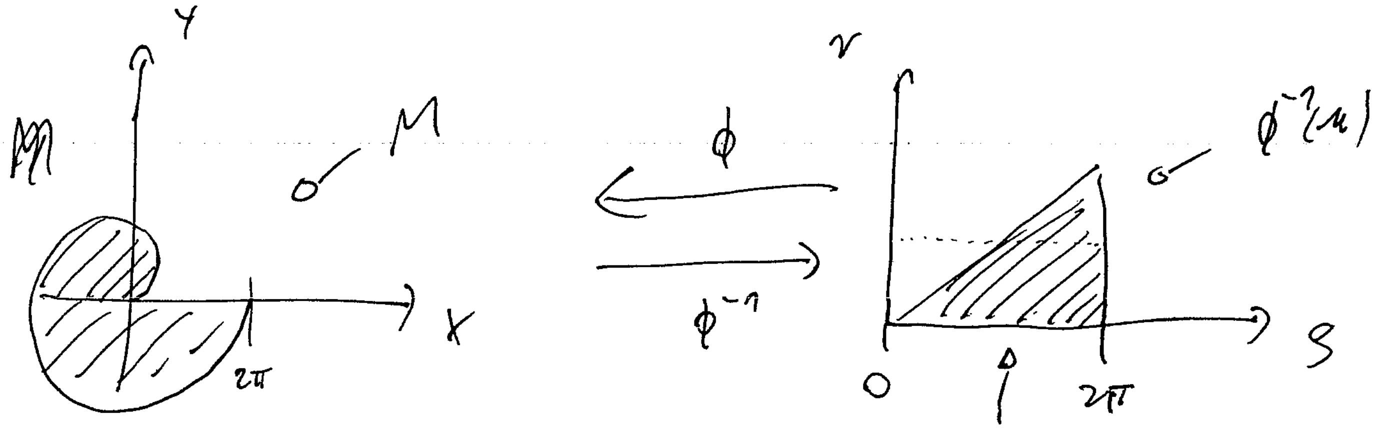
$$\int_M d(x,y) = \int_{\phi^{-1}(M)} |\det \phi'| \, d(u,v) = \text{Fläche}(Q) = \frac{1}{3}(q-p)(b-a)$$

~~VOLUMEN~~ Fläche von M

Denn $\det \phi'(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{4}{3} u^{-2/3} v^{2/3} & \frac{2}{3} u^{1/3} v^{-1/3} \\ \frac{2}{3} u^{-1/3} v^{1/3} & \frac{1}{3} u^{2/3} v^{-2/3} \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}$

8.2

Wir rechnen im $\mathbb{R}^2$ (also $x = r\cos\varrho$, $y = r\sin\varrho$ mit $r = |z|$, $\varrho = \arg z$)

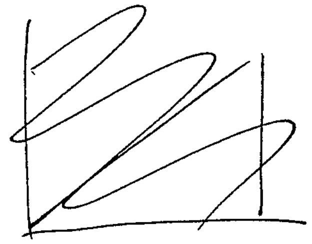


In Polarkoordinaten

Mit der Transformationsformel gilt:

$$\text{Fläche } M = \int_M d(x,y) = \int_{\phi^{-1}(M)} \underbrace{|\det \phi'(r,\varrho)|}_{=r}\, d(r,\varrho)$$

$$= \int_{\phi^{-1}(M)} r \, d(r,\varrho) \overset{\text{FUBINI}}{=} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\varrho} r \, dr \right) d\varrho = \int_0^{2\pi} \frac{\varrho^2}{2} \, d\varrho = \frac{1}{6} 8\pi^3$$



Hinweis (Beide Aufgaben aus TIMMANN (Rep Analysis Teil 2))

Universität Würzburg
Institut für Mathematik
Prof. J. Steuding, J. Jordan

Wintersemester 07/08
17.12.2007

9 . Tutorium zur Analysis III

9.1 Gegeben seien die 1-Formen $\omega = dx_1 + x_2 dx_3$ und $\lambda = \exp(x_1 x_2) dx_3$ (in $\mathbb{R}^7$). Bestimmen Sie

(i) $d\omega$

(ii) $d^2\omega$

(iii) $d\omega \wedge d\omega$

(iv) $\omega \wedge \lambda$

(v) $d(\omega \wedge \lambda)$

9.2 Für welche $n \geq 2$ gibt es stetig differentierbare 1-Formen ω im $\mathbb{R}^n$, so dass $\omega \wedge d\omega \neq 0$ ist?

9.3 Gehen Sie am Mittwoch zum Weihnachtskolloquium und zur anschließnden Weihnachtsfeier.

Tutorium:

Thema: Differentialformen, Cartanableitung, Differentialoperator.

(1) Begriffe wdh.

d: k-Formen $\longrightarrow$ $k+1$ Formen

$\wedge : (p\text{-Form} \times q\text{ Form}) \longrightarrow p+q$ Form.

Aufgabe 2: a)

Ist ω 1-Form $\Rightarrow$ $d\omega$ 2 Form $\Rightarrow \omega \wedge d\omega$ 3 Form.

Allgemein: $k > n$ dann ist k-Form trivial,

denn $\omega = \sum a_{i_1 \dots i_k}(x) \underbrace{dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}}_{=0}$

Da mindestens einmal $x_{i_{\alpha_1}} = x_{i_{\alpha_2}}$.

$\Longrightarrow \omega \wedge d\omega = 0$ falls $n = 2$.

b) Für $n \geq 3$ betrachte $\omega = dx_1 + x_2 dx_3$

$\Longrightarrow d\omega = dx_2 \wedge dx_3$

Aufgabe 1

$\Longrightarrow \omega \wedge d\omega = (dx_1 + x_2 dx_3) \wedge (dx_2 \wedge dx_3)$

$= \underbrace{dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3}_{\neq 0} + \underbrace{x_2 dx_3 \wedge dx_2 \wedge dx_3}_{= 0}$

Denn: $\phi : \underset{\subseteq \mathbb{R}^3}{K} \longrightarrow \mathbb{R}^n$: $\int\limits_{\phi} \omega(\phi) = \mathrm{Vol}(K) \neq 0$.

A1 ⑦–⑫ $\omega = dx_1 + x_2\, dx_3$ $\qquad f_1(x)=1,\ f_2(x)=0,\ f_3(x)=x_2,\ f_4(x)=0$ $u\geq 3$

$\lambda = \exp(x_1 x_2)\, dx_3$ $\qquad g_1(x)=g_2(x)=0,\ g_3(x)=\exp(x_1x_2),\ g_4(x)=$ $u\geq 3$

ⓐ $$d\omega \underset{\text{ÜB 7.1.a}}{=} \sum_{j<i} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} - \frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right) dx_j \wedge dx_i$$

$$= \sum_{(1,2),(1,3),(2,3)} \underbrace{\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} - \frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right)}_{\substack{=0 \text{ für } (1,2),(1,3) \\ =1 \text{ für } (2,3)}} dx_j \wedge dx_i = \underline{dx_2 \wedge dx_3}$$

② $\underline{d^2\omega = 0}$ denn $\omega \in C^2$ (siehe Satz 11.1)

③ $d\omega \wedge d\omega = (dx_2 \wedge dx_3) \wedge (dx_2 \wedge dx_3) = -\underbrace{dx_2 \wedge dx_2}_{=0} \wedge \underbrace{dx_3 \wedge dx_3}_{=0}$

④ $$\omega \wedge \lambda = \sum_{i,j} f_i(x)\, g_j(x)\, (dx_i \wedge dx_j) \quad \underline{=0}$$

$$= f_1(x)\overbrace{g_2(x)}^{=0}(dx_1 \wedge dx_2) + f_1(x) g_3(x)(dx_1 \wedge dx_3)$$

$$+ \overbrace{f_2(x)}^{=0} g_3(x)(dx_2 \wedge dx_3)$$

$$+ \overbrace{f_2(x)}^{=0}\overbrace{g_1(x)}^{=0}(dx_2 \wedge dx_1) + f_3(x)\overbrace{g_1(x)}^{=0}(dx_3 \wedge dx_1)$$

$$+ f_3(x)\overbrace{g_2(x)}^{=0}(dx_3 \wedge dx_1)$$

$$= \exp(x_1 x_2)(dx_1 \wedge dx_3) = \sum_{(i,j)} b_{(i,j)}(x)\, dx_{(i,j)}$$

mit $\underline{b_{13}(x) = \exp(x_1 x_2)}$

$b_{ij} = 0$ sonst

⑤ ~~$d(\omega \wedge \lambda) =$~~

(5) $d(\omega \wedge \lambda)$ (A1 (5))

direkt:

$$\omega \wedge \lambda = \cancel{\sum} \; x_2 \; \exp(x_1 x_2)\, (dx_1 \wedge dx_3)$$

$$\Rightarrow d(\omega \wedge \lambda) = \sum_{k=1}^{3} D_k \exp(x_1 x_2)\, dx_k \wedge dx_1 \wedge dx_3$$

$$= D_2 \exp(x_1 x_2)\, dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_3$$

$$= -x_1 \exp(x_1 x_2)\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$$

ODER MIT Satz: 11.1 $p=1$

$$d(\omega \wedge \lambda) = (d\omega \wedge \lambda) + ((-1)^p \omega \wedge d\lambda) \quad \leftarrow \text{3 FORM !}$$

$p=1$

mit $d\omega \wedge \lambda = \exp(x_1 x_2)\, dx_2 \wedge \underbrace{dx_3 \wedge dx_3}_{=0} = 0$

und $-\omega \wedge d\lambda = -\omega \wedge (x_2 \exp(x_1 x_2)(dx_1 \wedge dx_3) +$

$$+ x_1 \exp(x_1 x_2)(dx_2 \wedge dx_3))$$

$$= \underbrace{(-dx_1 \wedge x_2 \exp(x_1 x_2)\, dx_1 \wedge dx_3)}_{=0}$$

$$+ (-x_2 dx_3 \wedge x_2 \exp(x_1 x_2)(dx_1 \wedge dx_3)) = 0$$

$$+ (-dx_1 \wedge x_1 \exp(x_1 x_2)(dx_2 \wedge dx_3))$$

$$\underbrace{- x_2 dx_3 \wedge x_1 \exp(x_1 x_2)(dx_2 \wedge dx_3)}_{=0}$$

$$= -x_1 \exp(x_1 x_2)\, d \wedge \wedge d$$

UNIVERSITÄT WÜRZBURG
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. J. Steuding, J. Jordan

Wintersemester 07/08
07.01.2008

10 . Tutorium zur Analysis III

10.1 Zu $M \subset \mathbb{R}^n$ sei

$$\operatorname{con}(M) := \left\{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i \;\middle|\; m \in \mathbb{N}, \lambda_i \in [0,1], x_i \in M, \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1 \right\}$$

die *konvexe Hülle* von M. Z.B. ist der Einheitssimplex S^k die konvexe Hülle der Menge $\{0, e_1, \ldots, e_k\}$ (mit e_i sei hier der i-te Einheitsvektor bezeichnet).

a) Es seien $P_0, \ldots, P_n \in \mathbb{R}^n$ und $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ so dass $Ae_i = P_i - P_0$ für $i = 1, \ldots, n$. Zeigen Sie

$$\lambda\left(\operatorname{con}\{P_0, \ldots, P_n\}\right) = \frac{1}{n!} |\det(A)|.$$

b) Betrachten Sie die affinen k-Simplizes

$$\sigma = [P_0, P_1, \ldots, P_{k-1}, P_k] \quad \text{und} \quad \tilde{\sigma} = [P_k, P_{k-1}, \ldots, P_1, P_0].$$

Für welche $k \in \mathbb{N}$ sind σ und $\tilde{\sigma}$ gleich orientiert?

10.2 Es sei $\sigma = [P_0, \ldots, P_k]$ ein affines k-Simplex, so dass $P_0 - P_i$, $i = 1, \ldots, k$ linear unabhängig sind. Wir nennen $\sigma_{i_0,\ldots,i_d} := [P_{i_0}, \ldots, P_{i_d}]$ (mit $i_\alpha \neq i_\beta$ falls $\alpha \neq \beta$) einen d-dimensionalen Teilsimplex von σ.

a) Wieviele verschiedene d-dimensionale Teilsimplizes von σ gibt es? Hierbei sollen $\sigma_{i_0,\ldots,i_d}$ und $\sigma_{\tilde{i}_0,\ldots,\tilde{i}_d}$ als gleich gelten genau dann wenn sie gleiche Orientierung haben und $\operatorname{con}(P_{i_0}, \ldots, P_{i_d}) = \operatorname{con}(P_{\tilde{i}_0}, \ldots, P_{\tilde{i}_d})$ gilt.

b) Es sei $\sigma_1, \ldots, \sigma_N$ die Menge alle d-dimensionalen Teilsimplizes von σ Bestimmen Sie $\sum_1^N \sigma_i$

10.1 $P_i - P_0,\ i=1,\dots,n$ linear abhängig $\Rightarrow \lambda(\mathrm{con}(P_0,\dots,P_n))=0$

a) $\Rightarrow$ A singulär $= \det(A)$

(~~Cond nicht eindeutig~~)

$P_i - P_0,\ i=1,\dots,n$ lin. unabhängig

$$\Rightarrow \lambda(\mathrm{con}(P_0,\dots,P_n)) = \int_{\mathrm{con}(P_0,\dots,P_n)} dy \ \underset{\text{FORMEL}}{\overset{\text{TRANSFOR}}{\underset{\text{MATION}}{=}}} \int_{S^n} |\det \phi'(x)|\, dx$$

mit $\phi: S^n \to \mathrm{con}(P_0,\dots,P_n)$; $\phi'(x)=A$

$$\sum_{i=1}^n v_i e_i \mapsto P_0 + A\sum_{i=1}^n v_i e_i \qquad \lambda(S^n) = \frac{1}{n!}\ (\text{ÜA})$$

$$\Rightarrow \underline{\lambda(\mathrm{con}(P_0,\dots,P_n)) = \frac{1}{n!}\cdot|\mathrm{Det}(A)|}$$

---

b) Für $n=1,2$ verschieden

$([P_0,P_1] = -[P_1,P_0])$

$([P_0,P_1,P_2] = -[P_2\,P_1\,P_0])$

Für $n=3,4$ gleich

$([P_0\,P_1\,P_2\,P_3] = [P_3\,P_2\,P_1\,P_0]$

$[P_0\,P_1\,P_2\,P_3\,P_4] = [P_4\,P_3\,P_2\,P_1\,P_0]$

$\Rightarrow$ VERMUTUNG : verschieden : $n = 4m+1$, $4m+2$ $\quad m\in\mathbb{N}$

gleich : $n = 4m+3$, $4m+4$ $\quad m\in\mathbb{N}$

<u>Beweis</u> ("Induktion")

Falls n ungerade $\Rightarrow$ Orientierung bleibt gleich bei $n+1$

$[P_0,\dots,P_n,P_{n+1}] = [P_n,\dots,P_0,P_{n+1}] \underset{\substack{\uparrow\\ n-1\text{ mal}}}{\overset{(-1)}{=}} [P_n,\dots P_1,P_{n+1},P_0] = \dots = [P_0 \dots P_{n+1}$

Falls n gerade $\Rightarrow$ Orientierung ändert sich bei $n+1$.

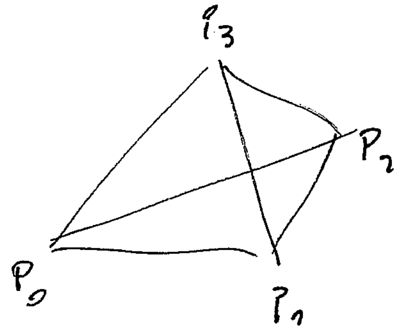
10.2

a) Gesucht sind also die d elementigen Teilmengen von $P_0, \dots, P_K$.

Zu jeder Menge $\{P_{i_0}, \dots P_{i_d}\}$ gibt es zwei verschiedene Simplizes (einmal mit Orientierung $+1$ einmal -1).

$\Longrightarrow$ $\# = 2 \cdot \binom{K+1}{d+1}$

Bsp:



$K = 3 \quad d = 3 \Longrightarrow \# = 2$

$\quad\quad\quad\; d = 2 \Longrightarrow \# = 8$

$\quad\quad\quad\; d = 1 \Longrightarrow \# = 12$

---

b) Es gilt $\Gamma := \sum_{i=1}^{N} \sigma_i = 0$, denn

zu jedem σ_i gibt es ein eindeutiges $-\sigma_i$.

UNIVERSITÄT WÜRZBURG
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. J. Steuding, J. Jordan

Wintersemester 07/08
14.01.2008

11 . Tutorium zur Analysis III

11.1 (Wiederholung)
Zu $a > 0$ seien die Mengen

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 \leq 2az\}$$

und

$$Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 \leq 2a^2, 0 \leq z \leq a\}$$

gegeben. berechnen Sie das Integral

$$I = \int_{P \cap Z} (x^2 + y^2 + z^2) d\lambda(x, y, z).$$

Hinweis: benutzen Sie Zylinderkoordinaten, d.h., die Transformation $T : \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $(r, \varphi, z) \mapsto (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)$.

Lösungshinweis: Es ist

$$A = P \cap Z = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \,|\, \underbrace{x^2 + y^2}_{:=r^2} \leq 2az, 0 < z < a\}$$

Zur Berechnung des Integrals benutzen wir Zylinderkoordinaten (d.h. die Transformation $T : \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $(r, \varphi, z) \mapsto (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)$ (Beachte: $|\det T'| = r$). Wegen

$$T^{-1}(A) = \{(r, \varphi, z) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi] \times \mathbb{R}, r \leq \sqrt{2az}\}$$

folgt mit dem Satz von Fubini (die integrierte Funktion ist positiv)

$$\begin{aligned}
\int_A (x^2 + y^2 + z^2) d\lambda_3(x, y, z) &= \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2az}} (r^2 + z^2) r \, dr \, d\varphi \, dz \\
&= \int_0^a \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{4} r^4 + \frac{z^2 r^2}{2}\right]_0^{\sqrt{2az}} \\
&= 2\pi \left[\frac{a^2 z^3}{3} + \frac{a z^4}{4}\right]_0^a \\
&= \frac{7}{6} \pi a^5
\end{aligned}$$

11.2 (Wiederholung)
Für welche $\alpha \in \mathbb{R}^+$ existiert das Lebesgue Integral

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{\sin(\|x\|)}{\|x\|^\alpha} d\lambda(x).$$

Benutzen Sie ohne Beweis[a]: $\int_{\mathbb{R}+} \frac{\sin(x)}{x^\alpha} d\lambda(x)$ existiert genau dann wenn $1 < \alpha < 2$.

Lösungshinweis: Rechne in Polarkoordinaten $\Phi : [0,\infty)\times[0,2\pi[, (r,\beta) \mapsto (r\cos\beta, r\sin\beta)$. Die Dterminante der Jacobimatrix ist r. Dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{\sin(\|x\|)}{\|x\|^\alpha} d\lambda(x) = 2\pi \int_{\mathbb{R}+} \frac{\sin(r)}{r^\alpha} r d\lambda(r).$$

Also existiert obiges Integral genau dann wenn $2 < \alpha < 3$.

UNIVERSITÄT WÜRZBURG
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. J. Steuding, J. Jordan

Wintersemester 07/08
21.01.2008

12 . Tutorium zur Analysis III

12.1 Finden Sie zu den Formen ω eine Form α so dass $d\alpha = \omega$.

a) $\omega = (3x^2y^2 + 8xy^3)dx + (2x^3y + 12x^2y^2 + 4y)dy$ (in $\mathbb{R}^2$).

b) $\omega = (2y - 4)dy \wedge dz + (y^2 - 2x)dz \wedge dx + (3 - x - 2yz)dx \wedge dy$ (in $\mathbb{R}^3$).

c) $\omega = (xy^2 + yz^2 + zx^2)dx \wedge dy \wedge dz$ (in $\mathbb{R}^3$).

Lösungshinweis: Rechnen!

12.2 Es sei $\|\cdot\|$ irgendeine Norm auf $\mathbb{R}^n$ und

$$V := \{x \in (\mathbb{R}_+)^n \mid \|x\| < 1\}.$$

Weiter sei ω eine k-Form der Klasse C^1 mit $d\omega = 0$. Zeigen Sie: Es gibt eine $k-1$-Form λ in V mit $\omega = d\lambda$.

Lösungshinweis: Folgt direkt aus dem Poincareschen Lemma, denn V ist als Schnitt zweier konvexen Mengen konvex. Genauer: $B_{\|\cdot\|} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$ ist konvex, denn aus $x, y \in B_{\|\cdot\|}$ folgt $\|\lambda x + (1-\lambda)y\| \leq \lambda\|x\| + (1-\lambda)\|y\| < 1$ (für $\lambda \in [0,1]$) und $K := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i > 0\}$ ist konvex, denn aus $x, y \in K$ folgt $\lambda x_i + (1-\lambda)y_i > 0$ für alle Komponenten ($i = 1, \ldots, n$).