Universität Würzburg
Mathematisches Institut
Prof. J. Steuding, J. Jordan

Wintersemester 07/08
17.10.2007

1 . Übung zur Analysis III

Abgabe: Bis , 24.10.2007, 12:00 Uhr, Briefkästen an der Mathematik-Bibliothek.

1.1 Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Wir bezeichnen die Familie der offenen Teilmengen mit $\mathcal{O}(X)$ und die Familie der abgeschlossenen Teilmengen mit $\mathcal{A}(X)$. Zeigen Sie, dass für die (von $\mathcal{O}(X)$ erzeugten) *Borelsche σ-Algebra* $\mathcal{B}(X) := \mathfrak{A}_\sigma(\mathcal{O}(X))$ gilt:

$$\mathcal{B}(X) = \mathfrak{A}_\sigma(\mathcal{A}(X)).$$

1.2 a) Zeigen Sie, für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{1}{\sqrt{2}^k} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{16^i(8i+k)} = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x^{k-1}}{1-x^8}\, dx.$$

b) Zeigen Sie

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{16^i} \left(\frac{4}{8i+1} - \frac{2}{8i+4} - \frac{1}{8i+5} - \frac{1}{8i+6} \right) = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{4\sqrt{2} - 8x^3 - 4\sqrt{2}x^4 - 8x^5}{1-x^8}\, dx.$$

c) Berechnen Sie den Wert des Integrals aus Teilaufgabe b).
Hinweis: $\arctan(x)' = \frac{1}{1+x^2}$.

Hinweise: Auf **jede** der Übungsaufgaben gibt es 4 Punkte. Alle Aussagen müssen hinreichend begründet werden. Hierzu können Sie Ergebnisse aus Vorlesung, Übung und Tutorium verwenden. Werfen Sie Ihre Bearbeitungen rechtzeitig in den Briefkasten Ihres Tutoriums vor der Teilbibliothek Mathematik (Mit Name und Gruppennummer) ein. **Höchstens zwei** Studenten dürfen eine Bearbeitung zusammen abgeben. Diese sollten aus dem selben Tutorium sein. Hinreichend für die Zulassung zur Klausur sind das Erreichen von 50 % der Punkte sowie eine regelmäßige Mitarbeit im Tutorium. Durch die Zusatzaufgaben können Bonuspunkte erreicht werden. Die **Klausur:** findet am Donnerstag den 7. Februar um 11:45–13:15 im HS 2 statt.

Die Homepage zur Vorlesung ist

`http://www.mathematik.uni-wuerzburg.de/~jordan/ana3-WS07.html`

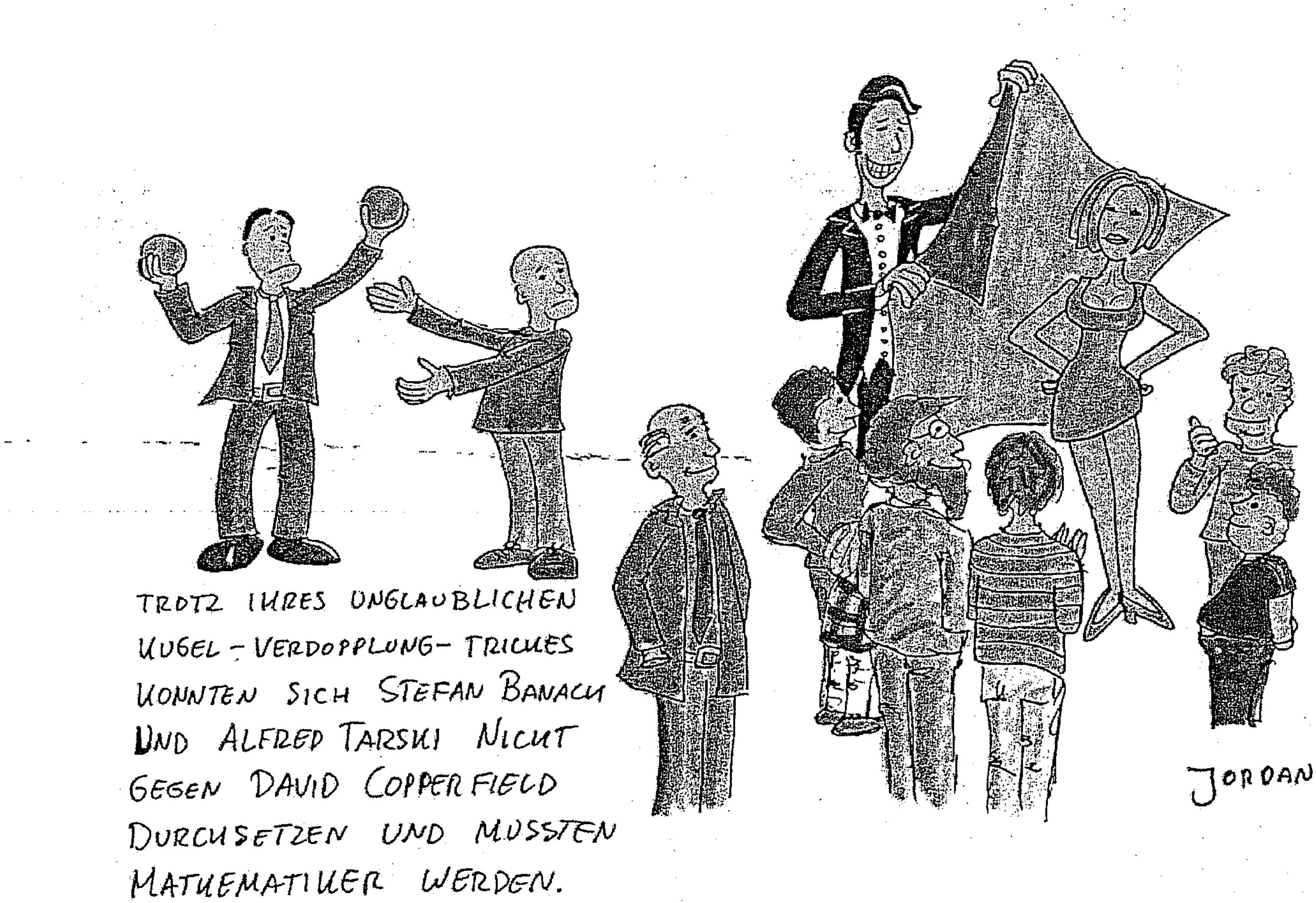
Zu den Tutorien sollten Sie sich über `SB@home` anmelden. Eine genauere Beschreibung zur Anmeldung finden Sie unter

$$\texttt{http://www.mathematik.uni-wuerzburg.de/uebungsanmeldung/}$$

Achtung: Wer sich nicht rechtzeitig anmeldt kann die Klausur nicht mitschreiben! Sie können sich bis (allerspätestens) **24.10.07** zu den folgenden Tutorien anmelden:

Tutorium 1	Mo	13:30-15:00	SE 08
Tutorium 2	Mo	13:30-15:00	SE 36
Tutorium 3	Mo	17:00-18:30	SE 36
Tutorium 4	Di	13:30-15:00	HS 4

Die ersten Tutorien finden am Montag den 22.10.07 bzw. Dienstag den 23.10.07 statt. In welche Gruppe Sie eingeteilt wurden, erfahren Sie über `SB@home`.
Die Aufgaben der Übungsblätter werden in der Übung am Dienstag um 17 Uhr im Turing Hörsaal vorgerechnet (erstmals am 30.04.07).



Für das erste Tutorium sollten Sie die Begriffe *σ-Algebra* und *Maß* wiederholen.

Aufgabe 1.1

ÜB 1: z.B. in $\mathbb{R}$; $\mathcal{O}(X) = \dot{\bigcup}_{n \in \mathbb{N}} I_n$ $(n = 1, \dots, N)$ I_n offene Intervalle

- $B(X) := \mathcal{O}_\sigma(\mathcal{O}(X)) := \bigcap_{\substack{\mathcal{A}\ \sigma\text{-Algebra} \\ \mathcal{O}(X) \subseteq \mathcal{A}}} \mathcal{A}$

Borelsche σ-Algebra (~~von~~ erzeugt Mengen in)

- Insbesondere ist $\mathcal{O}(X) \subseteq B(X)$.
- Für alle $A \in \mathcal{A}(X)$ ist $X \setminus A \in \mathcal{O}(X)$
- also $X \setminus \mathcal{A} \in B(X)$ - und damit $\mathcal{A} \in B(X)$.
- Also ist $\mathcal{A}(X) \subseteq B(X)$.

Damit ist

$$\tilde{B}(X) := \mathcal{O}_\sigma(A(X)) = \bigcap_{\substack{\mathcal{B}\ \sigma\text{-Algebra} \\ \mathcal{A}(X) \subseteq \mathcal{B}}} \mathcal{B} \subseteq B(X).$$

~~Auch analogen~~

~~Analo~~ Analog zeigt man

$$B(X) \subseteq \tilde{B}(X)$$

Alg: $N \subseteq B_\sigma(M) \Longrightarrow B_\sigma(M) = B_\sigma(M \cup N)$ $\square$

$\Rightarrow N \subseteq \mathcal{O} \quad \forall \mathcal{O}$ mit $M \subseteq \mathcal{O}$

$\Rightarrow N \cup M \subseteq \mathcal{O} \quad \forall \mathcal{O}$ mit $M \subseteq \mathcal{O}$ ($\supseteq$ sowieso)

$\Rightarrow B_\sigma(N \cup M) = \bigcap_{\mathcal{O} \text{ mit } N \cup M \subseteq \mathcal{O}} \mathcal{O} \subseteq \bigcap_{\mathcal{O} \text{ mit } M \subseteq \mathcal{O}} \mathcal{O} = B_\sigma(M)$

1.2

a)

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x^{k-1}}{1-x^8}\,dx = \int \underbrace{x^{k-1}}_{\text{hängt nicht von } i \text{ ab}} \cdot \overbrace{\underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} x^{8i}}_{\text{konvergent für } |x|<1}}^{\frac{1}{1-x^8}}\,dx \overset{\substack{\text{gliedweise integrieren} \\ \boxed{\text{ANA } 1/2}}}{=} \underbrace{\left[\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{k+8i}\, x^{k+8i}\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}}_{\text{Potenzreihe, absolut konvergent.}}$$

$\frac{1}{\sqrt{2}} < 1$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{k+8i}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{k+8i} = \frac{1}{\sqrt{2}^{\,k}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{16^i(8i+k)}$$

b)

$$\boxed{\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{4\sqrt{2} - 8x^3 - 4\sqrt{2}\,x^4 - 8x^5}{1-x^8}\,dx}$$

$$= 4\sqrt{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x^0}{1-x^8}\,dx \;(k=1) \;-\; 8\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x^3}{1-x^8}\,dx \;(k=4)$$

$$- 4\sqrt{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x^4}{1-x^8}\,dx \;(k=5) \;-\; 8\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x^5}{1-x^8}\,dx \;(k=6)$$

$$\overset{a)}{=} 4\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{16^i(8i+1)} - \frac{8}{(\sqrt{2})^4} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{16^i(8i+4)}$$

$$- 4\sqrt{2}\,\frac{1}{(\sqrt{2})^5} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{16^i(8i+5)} - \frac{8}{(\sqrt{2})^6} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{16^i(8i+6)}$$

$$= \boxed{\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{16^i}\left(\frac{4}{8i+1} - \frac{2}{8i+4} - \frac{1}{8i+5} - \frac{1}{8i+6}\right)}$$

c) $$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{4\sqrt{2} - 8x^3 - 4\sqrt{2}x^4 - 8x^5}{\underbrace{1 - x^8}_{=(x-1)(x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)}}\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{2}x+1} \right) dx$$

PARTIALBRUCHZERLEGUNG

NR: $(x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)A + (x-1)(x^2-\sqrt{2}x+1)B + (Cx+D)(x^2-1)$

$\overset{!}{=} 4\sqrt{2} - 8x^3 - 4\sqrt{2}x^4 - 8x^5$

$\Rightarrow (x^3 - \sqrt{2}x^2 + x + x^2 - \sqrt{2}x + 1)A$

$+ (x^3 - \sqrt{2}x^2 + x - x^2 + \sqrt{2}x - 1)B$

$+ Cx^3 - Cx + Dx^2 - D$

$\Rightarrow 2x^3 + Cx^3 =$

$1 + x^4 = (ax^2+bx+c)^2 = a^2x^4 +$

$x^4 = a^2x^4$

$x^4 = a^2x^4$

x^3: $0 = 2ab\,x^3 \Rightarrow b = 0$

x^2: $0 = 2ac + b^2 + \Rightarrow c = 0$

x: $0 =$

$1 = c^2$

$(ax^2+bx+c)(ax^2+bx+c)$

$= a^2x^4 + abx^3 + acx^2 + abx^3 + b^2x^2 + bxc$

$+ acx^2 + bcx + c^2$

UNIVERSITÄT WÜRZBURG
MATHEMATISCHES INSTITUT
Prof. J. Steuding, J. Jordan

Wintersemester 07/08
24.10.2007

2 . Übung zur Analysis III

Abgabe: Bis , 31.10.2007, 12:00 Uhr, Briefkästen an der Mathematik-Bibliothek.

2.1 In der Vorlesung wurde folgender Satz erwähnt:

Jede offene Menge $A \subset \mathbb{R}^d$ ist die abzählbare Vereinigung offener Quader.

In vielen Analysis Büchern ist dieser Satz nur stichpunktartig bewiesen. Gehen Sie in die Bibliothek, finden Sie eine geeignete Beweisskizze und vervollständigen Sie diese.

2.2 a) Gibt es eine Lebesgue-meßbare Mengen $N \subset \mathbb{R}$, so dass

$$\lambda(N^o) \neq \lambda(N) \quad \text{und} \quad \lambda(N) \neq \lambda(\overline{N})?$$

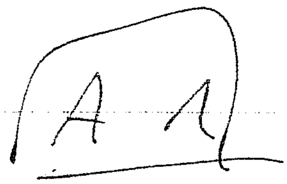
b) Gibt es eine Lebesgue-Nullmenge $M \subset \mathbb{R}$, so dass

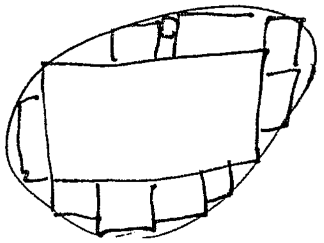
$$\{x + \mathbb{Q}\} \cap M \neq \emptyset \quad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}?$$

2.3 (Zusatzaufgabe)
Bestimmen Sie die millionste Nachkommastelle von π in Hexadezimalschreibweise. Das heißt: Bestimme $a_{1000000}$ so dass $\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{16^k}$ mit $a_k \in \{0, 1, 2, \ldots, 16\}$ (möglichst ohne a_{999999} bestimmen zu müssen).

SATZ: Jede offene Menge $A \in \mathbb{R}^d$ ist die abzählbare Vereinigung offener Quader

$\mathbb{R}^2$





Beweis (Köhler Buch)

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ offen.

$I = I_1 \times I_2 \times \dots I_n$

Def: $Q_k :=$ Menge offener Quader ~~mit~~
mit $I^i = \left(\frac{\alpha}{2^k}, \frac{\beta}{2^k}\right)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$

KLAR: Q_k ist abzählbar.

Betrachte:

$$P_k = \bigcup_{Q \in Q_k,\ Q \subseteq A} Q$$

← abzählbare Vereinigung offener Quader!

Es gilt

(i) $P_1 \subseteq P_2 \subseteq \dots P_3 \subseteq \dots$

(ii) $\bigcup_{k=1}^{\infty} P_k \subseteq A$

Behauptung: $A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k$

Denn: $x \in A \underset{A \text{ offen}}{\Longrightarrow} \exists k \in \mathbb{N}: x \in Q$ mit $Q \in Q_k$

$\Rightarrow x \in P_k \Rightarrow x \in \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k$ □

2.2) $\boxed{A2}$

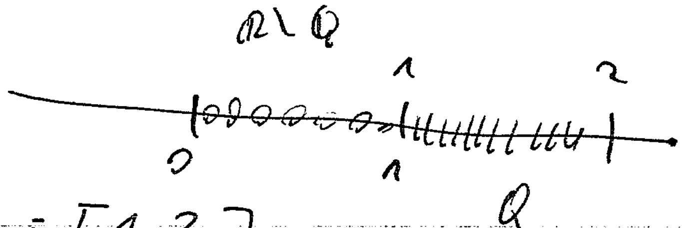
a) Ja. z.B. $N = \left([0,1]\setminus\mathbb{Q}\right) \overset{\text{disjunkt}}{\dot\cup} \underbrace{\left([1,2]\cap\mathbb{Q}\right)}_{\text{Nullmenge}}$

(i) $\mu(N) = \mu([0,1]\setminus\mathbb{Q}) = \mu([0,1]) - \mu([0,1]\cap\mathbb{Q})$

$= 1$

(ii) $\mathring{N} = \emptyset$, denn N hat keine inneren Punkte.

$\Rightarrow \mu(\mathring{N}) = 0$



(iii) $\bar{N} = [0,1]\cup[1,2] = [1,2]$

$\Rightarrow \mu(\bar{N}) = 2$

---

b) Nein

Ang: $\lambda(M) > 0$; $(x+\mathbb{Q})\cap M \neq \emptyset \quad \forall x\in\mathbb{R}$.

$\Rightarrow \forall x\ \exists q_x\in\mathbb{Q}\ \exists m_x\in M:\ x+q_x = m_x$

$\Rightarrow \forall x \in \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} (M-q) \longrightarrow \mathbb{R}\subseteq \bigcup_{q\in\mathbb{Q}}(M-q)$

0-Menge

Es ist aber $\lambda\Big(\underbrace{\bigcup_{q\in\mathbb{Q}} \overbrace{(M-q)}}_{\text{0-Menge}}\Big) = 0$ ↯

Universität Würzburg
Mathematisches Institut
Prof. J. Steuding, J. Jordan

Wintersemester 07/08
31.10.2007

3 . Übung zur Analysis III

Abgabe: Bis , 07.11.2007, 12:00 Uhr, Briefkästen an der Mathematik-Bibliothek.

Starting from such simple integrals the whole theory of integration follows by the Method of Monotone Sequences.
When we come to consider unbounded functions no fresh difficulty arises in the application of our original principle, provided always we consider... the two positive functions f_1 and f_2 whose difference is f and whose sum is the modulus of f. (W.H. Young)

3.1 Es seien $P_1 \ldots, P_n$ Punkte im $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass es überabzählbar viele Punkte gibt, die zu jedem P_i, $i = 1, \ldots, n$ irrationalen Abstand haben. (10 Punkte).

3.2 Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differentierbar. Wir bezeichnen $[x] =: \max\{z \in \mathbb{Z} \mid z \le x\}$ und $\Phi(x) = x - [x] - \frac{1}{2}$.

(i) Zeigen Sie

$$\sum_{a<n\le b} f(n) = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b \Phi(x)f'(x)dx + \Phi(a)f(a) - \Phi(b)f(b).$$

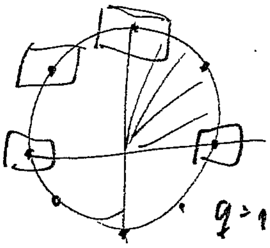
(5 Punkte).

(ii) Zeigen Sie

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = \log N + \gamma + o(1) \quad \text{bei} \quad N \to \infty$$

mit $\gamma := \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \log N\right)$ (5 Punkte).

(iii) Ist γ rational oder irrational? (100000000000 Extrapunkte).



$Q = e^{i\alpha}$

UNIVERSITÄT WÜRZBURG
MATHEMATISCHES INSTITUT
Prof. J. Steuding, J. Jordan

Wintersemester 07/08
31.10.2007

$q > 1$ $f(N) > \Phi(g(N))$, $O(g(N))$ bei ∞

3 . Übung zur Analysis III

$\lim_{N\to\infty} \frac{f(N)}{g(N)} = 0$

Abgabe: Bis , 07.11.2007, 12:00 Uhr, Briefkästen an der Mathematik-Bibliothek.

Starting from such simple integrals the whole theory of integration follows by the Method of Monotone Sequences.
When we come to consider unbounded functions no fresh difficulty arises in the application of our original principle, provided always we consider... the two positive functions f_1 and f_2 whose difference is f and whose sum is the modulus of f. (W.H. Young)

3.1 Es seien $P_1 \ldots, P_n$ Punkte im $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass es überabzählbar viele Punkte gibt, die zu jedem P_i, $i = 1, \ldots, n$ irrationalen Abstand haben. (10 Punkte).

3.2 Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differentierbar. Wir bezeichnen $[x] =: \max\{z \in \mathbb{Z} \,|\, z \leq x\}$ und $\Phi(x) = x - [x] - \frac{1}{2}$.

$\exists \gamma : \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \log N - \gamma \right) = 0$

(i) Zeigen Sie

$$\sum_{a<n\leq b} f(n) = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b \Phi(x)f'(x)dx + \Phi(a)f(a) - \Phi(b)f(b).$$

$\left(\lim \frac{f(n)}{\ldots} = 0 \right)$? VMAR ?

(5 Punkte).

$f(N)$

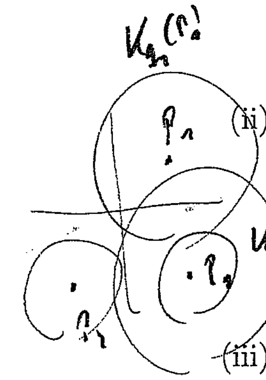
(ii) Zeigen Sie

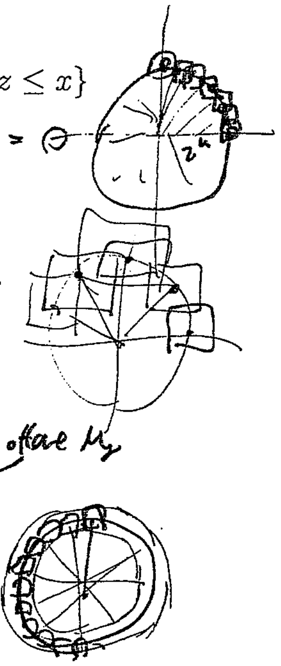
$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = \log N + \gamma + o(1) \quad \text{bei} \quad N \to \infty$$

$(2R)^2 = \mu(\square) = \mu U$

mit $\gamma := \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \log N \right)$ (5 Punkte).

(iii) Ist γ rational oder irrational? (100000000000 Extrapunkte).





Zu jedem P_i und jedem $q \in \mathbb{Q}_0^+$ ist $K_q(P_i) := \{ x \in \mathbb{R}^2 \,|\, \|(x,y) - P_i\| = q \}$ eine Nullmenge (klar nach Konstruktion des Maßes)

Damit ist $\bigcup_{i=1}^{n} \left(\bigcup_{q\in\mathbb{Q}} K_q(P_i) \right)$ auch eine Nullmenge.

$\Rightarrow \exists x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \left(\bigcup_{q\in\mathbb{Q}} K_q(P_i) \right)$.

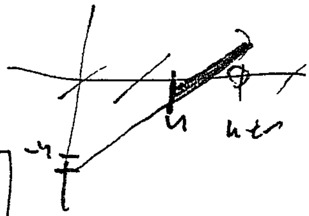
Nach Konstruktion ist $\|x - P_i\| \notin \mathbb{Q}$ $\forall$, $P_1, P_2 \ldots P_n$.

Sei $\underline{F(a,b) = \sum_{a<n\le b} f(n)}$

und $\underline{I(a,b) = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b \phi(x) f'(x)\,dx + \phi(a) f(a) - \phi(b) f(b)}$

(i) $\forall\ a<b<c$: $I(a,b) + I(b,c) = I(a,c)$

$F(a,b) + F(b,c) = F(a,c)$



$\Rightarrow$ ~~Es genügt~~ $\boxed{\text{O.B.d.A: } n \le a < b \le n+1}$

Fall 1: $n \le a < b < n+1$

Im Intervall $[n, n+1)$ ist $\underline{\phi(x) = -(n+\tfrac{1}{2}) + x}$

Mit partieller Integration folgt sofort:

$$\int_a^b \phi(x) f'(x)\,dx + \int_a^b \underbrace{\phi'(x)}_{=1} f(x)\,dx = \Big[\phi(x) f(x)\Big]_a^b = \phi(b) f(b) - \phi(a) f(a)$$

und damit $F(a,b) = 0 = I(a,b)$

falls $n \le a < b < n+1$

Fall 2: $\boxed{\text{Für } a \le n \text{ und } b = n+1 \text{ gilt: } \forall \varepsilon > 0}$

$$\underbrace{I(a, n+1-\varepsilon)}_{=0} + I(n+1-\varepsilon, n+1) = I(a,b)$$

Also
$$I(a,b) = \underbrace{\int_{n+1-\varepsilon}^{n+1} f(x)\,dx}_{\to 0} + \underbrace{\int_{n+1-\varepsilon}^{n+1} \phi(x) f'(x)\,dx}_{\to 0} + \phi(n+1-\varepsilon) f(n+1-\varepsilon) - \phi(n+1) f(n+1)$$

f stetig: $\lim_{\varepsilon \to 0} f(n+1-\varepsilon) = f(n+1)$

Aber: $\lim_{\varepsilon \to 0} \phi(n+1-\varepsilon) = \frac{1}{2}$; $\phi(n+1) = -\frac{1}{2}$

$\Longrightarrow \; I(a,b) = \frac{1}{2} f(n+1) - \frac{1}{2} f(n+1) = f(n+1) = F(a,b)$

b) $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \log N = \sum_{a=\frac{1}{2} < n \le N} f(n) - \log N$ (mit $f(x) = \frac{1}{x}$)

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{N} \frac{1}{x}\,dx + \underbrace{\int_{\frac{1}{2}}^{1} \phi(x)\left(\frac{1}{-x^2}\right)dx}_{=:C} + \int_{1}^{N} \phi(x)\frac{1}{(-x^2)}\,dx + \phi\left(\tfrac{1}{2}\right)f\left(\tfrac{1}{2}\right) - \overbrace{\phi(N)}^{=-\frac{1}{2}}\frac{1}{N} - \log N$$

$$= \log N - \log\left(\tfrac{1}{2}\right) + C + \boxed{\sum_{k=1}^{N-1} \int_{k}^{k+1} \phi(x)\frac{1}{(-x^2)}\,dx} + 0 + \frac{1}{2N} - \cancel{\log N}$$

$$= \log(2) + C + \underset{\to 0}{\frac{1}{2N}} - \sum_{k=1}^{N-1} \underbrace{\int_{k}^{k+1} \frac{\phi(x)}{x^2}\,dx}_{g(k)}$$

Es gilt $|g(k)| \le \frac{1}{2k^2}$ $\Rightarrow \sum |g(k)| = c_1 < \infty$

$k \le x \le k+1$

$g(k)$ ist monoton $\left(\frac{\phi(x)}{x^2}\right) \ne 0$

$$\frac{\phi(x)}{x^2} = \frac{x - (k+\frac{1}{2})}{x^2}$$

$-\frac{1}{2k^2}$, $\frac{1}{(k+1)^2}$

$\sum g(k) = c_2 < \infty$

Dann:

$$1.\ \frac{3}{2(k+1)^2} \le \underbrace{\int_{k}^{k+1} \frac{\phi(x)}{x^2}\,dx}_{=g(k)} \le \frac{1}{2k^2}$$

Also:

$$\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} - \log N\right) = \log 2 + C + \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N} + \lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}\int\frac{\phi(x)}{x^2}$$

Z.z.: $\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} - \log N\right)$ ex.

$\frac{3}{2}\left(\frac{\pi^2}{6} - 1\right) \le \quad \le \frac{\pi^2}{6}$

$\longrightarrow$ constante.

Es gilt:

(iii) offenes Problem: $\gamma \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \gamma \notin \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

γ heißt: EULER-MASCHERONI-KONSTANTE

UNIVERSITÄT WÜRZBURG
MATHEMATISCHES INSTITUT
Prof. J. Steuding, J. Jordan

Wintersemester 07/08
7.11.2007

4 . Übung zur Analysis III

Abgabe: Bis , 14.11.2007, 12:00 Uhr, Briefkästen an der Mathematik-Bibliothek.

4.1 a) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ Lebesgue-meßbar und die Menge $M := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq 0\}$ keine Nullmenge. Zeigen Sie, dass $\int_{\mathbb{R}^n} f d\lambda$ positiv ist. **Hinweis:** Betrachten Sie die Mengen $M_0 := \{ x \in \mathbb{R}^n | \, f(x) \geq 0\}$, $M_n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \frac{1}{n+1} \leq f(x) \leq \frac{1}{n}\}$ für $n \in \mathbb{N}$.

b) Seien $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ Lebesgue-integrierbare Funktionen und α, β verschiedene nichtnegative relle Zahlen, so dass $\alpha \leq g(x) \leq \beta$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Dann gibt es eine Zahl $\gamma \in [\alpha, \beta]$, so dass $\int_{\mathbb{R}^n} fg \, d\lambda = \gamma \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\lambda$.

4.2 Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall (nicht unbedingt beschränkt) und $f : I \to \mathbb{R}$ eine messbare und auf jedem Teilintervall von I Riemann-integrierbare Funktion. Zeigen Sie, dass f genau dann Lebesgue integrierbar ist, wenn $|f|$ über I uneigentlich Riemann-integrierbar ist. In diesem Falle gilt

$$\int_I f \, d\lambda = \int_I f(x) \, dx.$$

Aufgabe 4.2:

$f, g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ Lebesgue integrierbar.

(d.h. $\int_{\mathbb{R}^n} f\,d\mu$, $\int_{\mathbb{R}^n} g\,d\mu$ existieren und sind endlich)

Sei $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}_0^+ : \alpha \le g(x) \le \beta \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

Behauptung: $\exists \gamma \in [\alpha, \beta] : \int_{\mathbb{R}^n} fg\,d\lambda = \gamma \int_{\mathbb{R}^n} f\,d\lambda$

Bew:

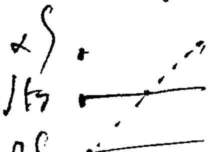
$\forall x \in \mathbb{R}^n : \quad \alpha f(x) \le f(x) g(x) \le \beta f(x)$

$$\Rightarrow \quad \alpha \int_{\mathbb{R}^n} f\,d\lambda \le \int_{\mathbb{R}^n} fg\,d\lambda \le \beta \int_{\mathbb{R}^n} f\,d\lambda$$

insbesondere: $\int_{\mathbb{R}^n} fg\,d\lambda$ integrierbar!

Betrachte...:

$$h : [\alpha, \beta] \longrightarrow \left[\alpha \int_{\mathbb{R}^n} f\,d\lambda, \beta \int_{\mathbb{R}^n} f\,d\lambda\right]$$



$$\gamma \longmapsto \gamma \int_{\mathbb{R}^n} f\,d\lambda$$

stetig ! (GENAU)

Zwischenwertsatz: $\exists \gamma \in [a, b] : \int fg\,d\lambda = \gamma \int f\,d\lambda$

Universität Würzburg
Mathematisches Institut
Prof. J. Steuding, J. Jordan

Wintersemester 07/08
14.11.2007

5 . Übung zur Analysis III

Abgabe: Bis , 21.11.2007, 12:00 Uhr, Briefkästen an der Mathematik-Bibliothek.

"*The geometers of the seventeenth century considered the integral of $f(x)$ — the word 'integral' had not been invented, but that does not matter — as the sum of an infinity of indivisibles, each of which was the ordinate, positive or negative, of $f(x)$. Very well! We have simply grouped together the indivisibles of comparable size. (...) One could say that, according to Riemann's procedure, one tried to add the indivisibles by taking them in the order in which they were furnished by variation in x, like an unsystematic merchant who counts coins and bills at random in the order in which they came to hand, while we operate like a methodical merchant who says:*

I have $m(E_1)$ pennies which are worth $1 \cdot m(E_1)$,
I have $m(E_2)$ nickels which are worth $5 \cdot m(E_2)$,
I have $m(E_3)$ dimes which are worth $10 \cdot m(E_3)$, etc.

Altogether then I have
$S = 1 \cdot m(E_1) + 5 \cdot m(E_2) + 10 \cdot m(E_3) + \dots$

The two procedures will certainly lead the merchant to the same result becaue no matter how much money he has there is only a finite number of coins or bills to count. But for us who must add an infinite number of indivisibles the difference between the two methods is of capital importance." (Lebesgue, 1966).

5.1 Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall (nicht unbedingt beschränkt) und $f : I \to \mathbb{R}$ eine messbare und auf jedem Teilintervall von I Riemann-integrierbare Funktion. Zeigen Sie, dass f genau dann Lebesgue integrierbar ist, wenn $|f|$ über I uneigentlich Riemann-integrierbar ist. In diesem Falle gilt

$$\int_I f \, d\lambda = \int_I f(x) \, dx.$$

5.2 Es sei $X \subset \mathbb{R}^d$ eine meßbare Menge und

$$\mathcal{N} := \{f : X \to \mathbb{R} \mid f \text{ meßbar und } f = 0 \text{ fast überall }\}.$$

Zu $f : X \to \mathbb{R}$ sei $\|f\|_\infty := \inf\{c \in \mathbb{R} \mid |f(x)| \le c \text{ fast überall }\}$. Weiter sei

$$\mathcal{L}^\infty := \{f : X \to \mathbb{R} \text{ meßbar mit } \|f\|_\infty < \infty\}.$$

Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|_\infty$ eine Norm auf dem Vektorraum $L^\infty := \mathcal{L}^\infty / \mathcal{N}$ ist.

5.3 Zeigen Sie:

a) Für alle $s > 0$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\int_0^\infty x^{s-1} e^{-nx} \, dx = \frac{\Gamma(s)}{n^s}$.

b) Für alle $s > 1$ gilt $\frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} \, dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s}$.

$\boxed{7.11}$

Es sei $I = (a,b)$ mit $-\infty \leq a < b \leq \infty$

und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen mit $a_n \to a$ $(a_n \leq a_{n+1})$

und $b_n \to b$ $(b_{n+1} \geq b_n)$

Es gilt:
$$\lim_{n\to\infty} \int_{a_n}^{b_n} |f(x)|\,dx \underset{\text{Satz 6.1}}{=} \lim_{n\to\infty} \int_I \underbrace{|f|\chi_{[a_n,b_n]}}_{f_n}\,d\lambda \underset{\substack{\text{Satz von der}\\ \text{monotonen}\\ \text{Konvergenz.}}}{=} \int_I |f|\,d\lambda \quad (*)$$

$\lim_{n\to\infty} f_n = |f|$

Rieman integrierbar auf $[a_n,b_n]$ $\Rightarrow$ Lebesgue integrierbar auf $[a_n,b_n]$

$f_{n+1} \geq f_n$ nichtnegativ, meßbar.

"$\Rightarrow$" Ist $|f|$ auf I (uneigentlich) Riemann integrierbar (d.h. Term lin. LS endlich) $\Rightarrow$ $|f|$ auf I Lebesgue integrierbar $\overset{\text{Satz 4.3}}{\Longrightarrow}$ f auf I Lebesgue integrierbar.

"$\Leftarrow$" f Lebesgue integrierbar auf I $\underset{\text{sowieso}}{\Longrightarrow}$ $|f|$ Lebesgue integrierbar auf I

$\overset{(*)}{\Longrightarrow}$ f uneigentlich Rieman integrierbar.

Aus dem Satz der $\boxed{\text{majorisierenden Konvergenz}}$ folgt nun

$$\underline{\int_a^b f(x)\,dx} \underset{\substack{\text{Def}\\ \text{uneigentl.}\\ \text{Riemann}}}{=} \lim_{n\to\infty} \int_{a_n}^{b_n} f(x)\,dx \underset{6.1}{=} \lim_{n\to\infty} \int_I \underbrace{f\chi_{[a_n,b_n]}}_{\tilde{f}_n}\,d\lambda = \underline{\int_I f\,d\lambda.}$$

$\lim_{n\to\infty} \tilde{f}_n = f$

$\lim_{x\to\infty} \tilde{f}_n(x) = f(x)$

$|f_n(x)| \leq f(x)$

Ein Beispiel zur Motivation

Wir betrachten den Maßraum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$. Als Beispiel wollen wir die stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ über dem Intervall $[0,1]$ Riemann- und Lebesgue-integrieren. Das Riemann-Integral ergibt:

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Zur Bestimmung des Lebesgue-Integrals geben wir eine Folge monoton wachsender Treppenfunktionen an:

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N},$$
$$f_n(x) := \sum_{j=0}^{2^n-1} \left(\frac{j}{2^n}\right)^2 I_{]\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n}]}(x).$$

Dann ist $f_n \in T^+$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $f_n \uparrow f I_{[0,1]}$, so dass wir mit Hilfe von (f_n) das Lebesgue-Integral bestimmen können:

$$\begin{aligned}\int f_n d\lambda &= \sum_{j=0}^{2^n-1} \left(\frac{j}{2^n}\right)^2 \left(\frac{j+1}{2^n} - \frac{j}{2^n}\right) \\ &= \frac{1}{2^{3n}} \sum_{j=0}^{2^n-1} j^2 \\ &= \frac{1}{2^{3n}} \frac{(2^n-1)2^n(2\cdot(2^n-1)+1)}{6} \\ &= \frac{2\cdot 2^{3n}}{6\cdot 2^{3n}} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) \\ &\longrightarrow \frac{1}{3} = \int_{[0,1]} f d\lambda.\end{aligned}$$

In diesem Fall stimmen beide Integrale überein, allerdings ist die Berechnung des Lebesgue-Integrals einer ganz einfachen Funktion durch Rückführung auf die Definition recht mühsam. Das gilt natürlich auch für das Riemann-Integral, aber durch den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung können wir Riemann-Integrale durch Stammfunktionen bestimmen.

Gleichheit von Riemann- und Lebesgue-Integral

Die obige Rechnung verdeutlicht, wie nützlich es wäre, wenn man zur konkreten Berechnung Lebesgue-Integrale auf Riemann-Integrale zurückführen könnte. Dies erlaubt der nachfolgende Satz.

Satz 2.17. *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ messbar und über dem Intervall $[a,b] \subset \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Dann ist f Lebesgue-integrierbar, und es gilt:*

$$\int_{[a,b]} f d\lambda = \int_a^b f(x)dx.$$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Nach Definition des Riemann-Integrals konvergieren die Riemannsche Ober- und Untersumme gegen den Integralwert. Wir finden demnach eine Zerlegung des Intervalls $[a,b]$ in $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, so dass mit den Bezeichnungen

$$M_i := \sup_{x_{i-1} \leq x < x_i} f(x) \quad \text{und} \quad m_i := \inf_{x_{i-1} \leq x < x_i} f(x), \; i = 1, \ldots, n,$$

gilt:

$$U_n := \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) \leq \int_a^b f(x)dx \leq \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}) =: O_n$$

und $\quad 0 \leq O_n - U_n < \varepsilon.$

Zur Berechnung des Lebesgue-Integrals betrachten wir die von der Obersumme bzw. Untersumme beschriebene Treppenfunktion:

BLATT 4

$$f_u := \sum_{i=1}^n m_i I_{[x_{i-1}, x_i[}, \quad f_o := \sum_{i=1}^n M_i I_{[x_{i-1}, x_i[}.$$

Es folgt unmittelbar

$$f_u \leq f \leq f_o$$

und

$$U_n = \int f_u d\lambda \leq \int f d\lambda \leq \int f_o d\lambda = O_n.$$

Damit erhalten wir

$$\left| \int f d\lambda - \int_a^b f(x)dx \right| \leq O_n - U_n < \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, ist die Behauptung gezeigt. □

Auch für uneigentliche Integrale stimmen Lebesgue-Integral und Riemann-Integral oft überein:

Satz 2.18. *Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine messbare und auf jedem kompakten Teilintervall von I Riemann-integrierbare Funktion. f ist genau dann Lebesgue-integrierbar, wenn $|f|$ über I uneigentlich Riemann-integrierbar ist, und dann gilt:*

$$\int_I f d\lambda = \int_I f(x)dx.$$

Beweis. Es sei $I =]a,b[$, $-\infty \le a < b \le \infty$ und (a_n) sowie (b_n) zwei Folgen mit $a_n \downarrow a$, $b_n \uparrow b$. Satz 2.17 sowie Satz 2.7 von der monotonen Konvergenz ergeben:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{a_n}^{b_n} |f(x)|dx = \lim_{n\to\infty} \int_I |f| I_{[a_n,b_n]} d\lambda = \int_I |f| d\lambda.$$

Ist $|f|$ auf I uneigentlich Riemann-integrierbar, d.h. der linke Term endlich, so schließen wir in obiger Gleichung von links nach rechts auf die Lebesgue-Integrierbarkeit von $|f|$ und damit von f. Ist f Lebesgue-integrierbar über I, schließen wir umgekehrt von rechts nach links auf die uneigentliche Riemann-Integrierbarkeit von $|f|$ über I. Die Gleichheit der beiden Integrale ergibt sich für uneigentlich Riemann-integrierbares $|f|$ durch den Satz 2.14 von der dominierten Konvergenz und Satz 2.17:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_{a_n}^{b_n} f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_I f I_{[a_n,b_n]} d\lambda = \int_I f d\lambda.$$

Der Beweis für halboffene Intervalle I verläuft völlig analog. □

Unterschiede zwischen Riemann- und Lebesgue-Integral

Obwohl wir für viele Funktionen den Satz 2.17 verwenden können, gibt es durchaus Funktionen, die Lebesgue-integrierbar sind, aber nicht Riemann-integrierbar.

Beispiel 2.19. Die wohl bekannteste nicht Riemann-integrierbare Funktion ist die Indikatorfunktion der rationalen Zahlen:

$$I_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$
$$x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{für } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Über jedem Intervall $[a,b]$ konvergieren die Riemannschen Untersummen gegen 0 und die Riemannschen Obersummen gegen 1. Für das Lebesgue-Integral hingegen gilt, da $\mathbb{Q}$ eine λ-Nullmenge ist:

$$\int_{[a,b]} I_{\mathbb{Q}} d\lambda = \int I_{[a,b]\cap\mathbb{Q}} d\lambda = \lambda([a,b] \cap \mathbb{Q}) = 0.$$

◇

Auch die Konvergenzsätze für das Lebesgue-Integral sind für das Riemann-Integral im Allgemeinen falsch, wie das nächste Beispiel zeigt. Die Gültigkeit der Konvergenzsätze für das Lebesgue-Integral ist ein wesentlicher Vorteil dieser Theorie.

Beispiel 2.20. Es sei $\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, \ldots\}$ eine Abzählung der rationalen Zahlen. Wir betrachten die Funktionenfolge

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N},$$
$$x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \{q_1, \ldots, q_n\}, \\ 0 & \text{für } x \notin \{q_1, \ldots, q_n\}. \end{cases}$$

Dann ist (f_n) eine monoton wachsende, durch 1 beschränkte Folge Riemann-integrierbarer Funktionen mit $f_n \uparrow I_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$. Die Integrale $\int f_n dx = 0$ konvergieren gegen 0, aber die Grenzfunktion $I_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ ist nicht Riemann-integrierbar. Daher gelten die zum Satz von der monotonen Konvergenz und zum Satz von der dominierten Konvergenz analogen Aussagen für das Riemann-Integral nicht. Der springende Punkt ist, dass punktweise Konvergenz für das Riemann-Integral zu schwach ist. Daher wird in den entsprechenden Aussagen der Analysis gleichmäßige Konvergenz vorausgesetzt. ◇

Beispiel 2.21. Das klassische Beispiel für eine uneigentlich Riemann-integrierbare, aber nicht Lebesgue-integrierbare Funktion ist die Funktion

$$f :]0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}.$$

f ist stetig und daher auf jedem Intervall $I \subset]0,\infty[$ Riemann-integrierbar. Für $b > a > 0$ folgt durch partielle Integration

$$\left| \int_a^b \frac{\sin(x)}{x} dx \right| = \left| \left[\frac{-\cos(x)}{x} \right]_a^b - \int_a^b \frac{\cos(x)}{x^2} dx \right| \le \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \int_a^b \frac{1}{x^2} dx = \frac{2}{a}.$$

Sei $\varepsilon > 0$, so folgt für $b > a > \frac{2}{\varepsilon}$

$$\left| \int_a^b \frac{\sin(x)}{x} dx \right| \le \frac{2}{a} < \varepsilon,$$

so dass nach dem Cauchy-Kriterium f auf $]0,\infty[$ uneigentlich integrierbar ist. Dies gilt jedoch nicht für $|f|$, denn:

$$\int_\pi^{(n+1)\pi} \left| \frac{\sin(x)}{x} \right| dx \ge \sum_{i=1}^n \frac{1}{(i+1)\pi} \int_{i\pi}^{(i+1)\pi} |\sin(x)| dx = \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty.$$

Nach Satz 2.18 ist f auf $]0,\infty[$ nicht Lebesgue-integrierbar. ◇

Rie $- \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx =$

2

i) $\|f\|_\infty = 0 \iff \inf\{c\in\mathbb{R} \mid \|f(x)\|\le c \ \text{f.ü.}\} = 0$

$\iff \|f(x)\| = 0 \ \text{f.ü.}$

$\iff f\in\mathcal{N}$

Sei $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

ii) $\|\lambda f\|_\infty = \inf\{c\in\mathbb{R} \mid \|\lambda f(x)\|\le c, \ \text{f.ü.}\}$

$= \inf\{c\in\mathbb{R} \mid |\lambda|\,\|f(x)\|\le \frac{c}{|\lambda|}, \ \text{f.ü.}\}$

$= |\lambda| \inf\{\tilde c\in\mathbb{R} \mid \|f(x)\|\le \tilde c, \ \text{f.ü.}\}$

iii) $\|f\|_\infty + \|g\|_\infty = \inf\{c\in\mathbb{R} \mid \|f(x)\|\le c \ \text{f.ü.}\} + \inf\{\tilde c\in\mathbb{R} \mid \|g(x)\|\le \tilde c \ \text{f.ü.}\}$

$\ge 2\min\left(\inf\left\{c\in\mathbb{R} \mid \begin{array}{ll}\|f(x)\|\le c & \text{f.ü.}\\ \|g(x)\|\le c & \text{f.ü.}\end{array}\right\}\right)$

$= \inf\{c\in\mathbb{R} \mid \|f(x)\|+\|g(x)\| \le$

$\|f(x)\|+\|g(x)\| \le c \ \text{f.ü.}\}$

$> \inf\{c\in\mathbb{R} \mid \|f(x)\|+\|g(x)\| \le c \ \text{f.ü.}\}$

$\ge \inf\{c\in\mathbb{R} \mid \|f(x)+g(x)\| \le c \ \text{f.ü.}\}$

$\|f+g\|_\infty = \inf\{c\in\mathbb{R} \mid \|f(x)+g(x)\| \le c \ \text{f.ü.}\}$

$\le \inf\{\tilde c\in\mathbb{R} \mid \|f(x)\|+\|g(x)\| \le \hat c \ \text{f.ü.}\}$

$(\|f(x)+g(x)\| \le \|f(x)\| + \|g(x)\| \le \tilde c)$

$\le \inf\{c_1\in\mathbb{R} \mid \|f(x)\|\le c_1 \ \text{f.ü.}\} + \inf\{c_2\in\mathbb{R} \mid \|g(x)\|\le c_2 \ \text{f.ü.}\}$

$= \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$

5.3 a) Wir wissen $\int_0^\infty x^{s-1} e^{-x}\, dx = \Gamma(s)$ (Ana I oder Tut)

Substitution: $\boxed{y = \frac{1}{n} x}$; $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{n}$

Dann ist $= \int_0^\infty n^{s-1} y^{s-1} e^{-yn}\, n\, dy = n^s \int_0^\infty y^{s-1} e^{-yn}\, dy$

$$\Rightarrow \quad \frac{\Gamma(s)}{n^s} = \int_0^\infty y^{s-1} e^{-y \cdot n}\, dy$$

b) Wir wissen $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s}$ konvergiert für $s > 1$ (siehe Ana I, Verdünnungssatz.)

~~Dann ist~~ Aus a) folgt

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty y^{s-1} e^{-y \cdot n}\, dy$$

Die Funktionenfolge $f_k : y \longmapsto \sum_{n=1}^{k} y^{s-1} e^{-yn}$

konvergiert gleichmäßig gegen $f : y \longmapsto \sum_{n=1}^\infty y^{s-1} (e^{-y})^n$

WARUM DARF ICH DAS MACHEN

$$= y^{s-1} \frac{1}{1 - e^{-y}}$$

Also ist $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \cdot \int_0^\infty \left(\sum_{n=1}^\infty y^{s-1} e^{-yn} \right) dy$

Riemann ~~Zeta~~ Funktion

$$= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty y^{s-1} \left(\frac{1}{1 - e^{-y}} - 1 \right) dy$$

$$= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty y^{s-1} \frac{1}{e^{y} - 1}\, dy$$

Universität Würzburg
Institut für Mathematik
Prof. J. Steuding, J. Jordan

Wintersemester 07/08
21.11.2007

6 . Übung zur Analysis III

Abgabe: Bis , 28.11.2007, 12:00 Uhr, Briefkästen an der Mathematik-Bibliothek.

6.1 Es seien $R := [\alpha_1, \alpha_2] \times [\beta_1, \beta_2]$ und $f \in \mathcal{C}^2(R, \mathbb{R})$. Zeigen Sie

$$\int_R \frac{\partial f^2}{\partial x \partial y}\, d(x,y) = \int_R \frac{\partial f^2}{\partial y \partial x}\, d(x,y) = f(\alpha_1, \beta_1) - f(\alpha_2, \beta_1) + f(\alpha_2, \beta_1) - f(\alpha_1, \beta_2).$$

Leiten Sie hieraus den Satz von Schwarz ab (siehe 2tes Semester).

6.2 a) Zeigen Sie, dass für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < 0$ gilt

$$\int_0^\infty e^{ax} \sin(bx)\, dx = \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Verwenden Sie $\int_0^\infty e^{x(a+bi)}\, dx = \frac{-1}{a+ib}$ für $a < 0$, $b \in \mathbb{R}$.

b) Zeigen Sie

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} e^{-tx}\, dx = c - \arctan t$$

für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$.

c) Zeigen Sie

$$\int_0^\infty e^{-x} \frac{\sin x}{x}\, dx = \int_0^1 \int_0^\infty e^{-x} \cos(bx)\, dx\, db.$$

d) Zeigen Sie

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

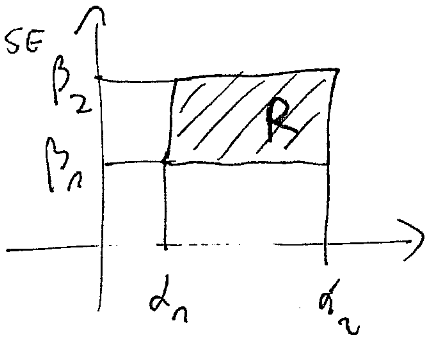
6.1)

$$\int_R \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\, d(x,y) \overset{\text{FUBINI TONELLI}}{=} \int_{[\alpha_1,\alpha_2]} \left(\int_{[\beta_1,\beta_2]} \frac{\partial}{\partial y}\Big(\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}}_{F(x,y)}\Big)\, dy \right) dx \quad \cancel{= \int_{[\beta_1,\beta_2]}\left(\int_{[\alpha_1,\alpha_2]} \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}\, dx\right) d}$$

FUNKTION WIRD NACH

HAUPTSATZ INTEGRAL/DIFFERENTIAL

F(x,y) wird nur y abgeleitet und nur nach y integriert.



$$\overset{!}{=} \int_{[\alpha_1,\alpha_2]} \Big[\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}}_{F(x,y)}\Big]_{\beta_1}^{\beta_2} dx$$

x fest!

$f \in C^2(R, \mathbb{R})$

$f: R \to \mathbb{R}$

$$= \int_{[\alpha_1,\alpha_2]} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,\beta_2) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,\beta_1) \right) dx$$

$$= \int_{[\alpha_1,\alpha_2]} \frac{\partial f}{\partial x}(x,\beta_2)\, dx - \int_{[\alpha_1,\alpha_2]} \frac{\partial f}{\partial x}(x,\beta_1)\, dx$$

HAUPTSATZ

$$= \Big[\cancel{\tfrac{\partial}{\partial x}} f(x,\beta_2)\Big]_{\alpha_1}^{\alpha_2} - \Big[f(x,\beta_1)\Big]_{\alpha_1}^{\alpha_2}$$

$$= f(\alpha_2,\beta_2) - f(\alpha_1,\beta_2) - f(\alpha_2,\beta_1) + f(\alpha_1,\beta_1)$$

ANALOG:

$$\int_R \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}\, d(x,y) \overset{\tilde F(x,y) \text{ stetig}}{=}$$

Zusatz: $\forall_{R \in \mathbb{R}^2}$: $\int_R \Big(\underbrace{\frac{\partial f \partial f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial f \partial f}{\partial y \partial x}}_{\text{stetig } \tilde F}\Big)\, d(x,y) = 0$ $\boxed{Z}$ $(f \in C^2)$

Rechteck

Für alle Rechtecke! "Permanenzprinzip" "Variationsprinzip" $\Longrightarrow$ $\frac{\partial f \partial f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial f \partial f}{\partial y \partial x}$ (Satz von Schwarz)!

6.2

a) Mit dem Hinweis folgt: $e^{x(a+bi)} = e^{xa}\cos bx + i\, e^{xa}\sin bx$

$$\int_0^\infty e^{ax}\sin bx\,dx = \int_0^\infty \mathrm{Im}\left(e^{x(a+bi)}\right)dx = \mathrm{Im}\int_0^\infty i\,\mathrm{Im}\left(e^{x(a+bi)}\right)dx$$

$$= \mathrm{Im}\int_0^\infty\left(\mathrm{Re}\left(e^{x(a+bi)}\right) + i\,\mathrm{Im}\left(e^{x(a+bi)}\right)\right)dx = \mathrm{Im}\int_0^\infty e^{x(a+bi)}\,dx$$

$$= \mathrm{Im}\,\frac{-1}{a+ib} = \frac{b}{a^2+b^2}$$

---

b) Betrachte $F(t) = \int_0^\infty \frac{e^{-tx}\sin x}{x}\,dx$ für $t>0$

~~Nach~~ Satz 6.4 ~~a)~~

$$F'(t) = -\int_0^\infty e^{-tx}\sin x\,dx \overset{a)}{=} \frac{-1}{1+t^2} = -(\arctan t)'$$

~~F Bed: für Satz 6.4 a) ... e^{-tx} „dominiert" d.h. $\int_0^\infty e^{-tx}\frac{\sin x}{x} \le \int_0^R \frac{\sin x}{x} \int_R^\infty e^{-tx}$~~

Also:

$F(t) = C - \arctan(t)$ für $t>0$

c) $\boxed{\int_0^\infty e^{-x}\frac{\sin x}{x}\,dx} = \int_0^\infty G(x)\,dx$ mit $G(x) = e^{-x}\frac{\sin x}{x} = \int_0^1 e^{-x}\cos bx\,db$

$$\xrightarrow{\text{FUBINI}} \int_0^\infty e^{-x}\frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^\infty\left(\int_0^1 e^{-x}\cos bx\,db\right)dx \overset{\text{FUBINI}}{=} \boxed{\int_0^1\left(\int_0^\infty e^{-x}\cos bx\,dx\right)db}$$

d) Analog zu a) $\boxed{\int_0^\infty e^{-x}\cos bx\,dx} = \int_0^\infty \mathrm{Re}\left(e^{x(a+bi)}\right)dx = \boxed{\frac{1}{1+b^2}}$

Also $\underline{F(1)} \overset{\text{Def}}{=} \int_0^\infty \frac{e^{-x}\sin x}{x}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{1+b^2}\,db = \left[\arctan b\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \underline{C} = F(1) + \arctan 1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}}}$

$$\lim_{t\to 0} F(0) = \lim_{t\to 0}\int_0^\infty \frac{e^{-tx}\sin t}{x}\,dx \overset{?}{=} \int_0^\infty \lim_{t\to 0}\frac{e^{-tx}\sin x}{x}\,dx = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$$

$\parallel$

$\frac{\pi}{2}$

$f_n(x)$ gleichmäßig homogen $\quad \frac{e^{-\frac{1}{n}x}\sin x}{x} \xrightarrow{\text{glm.}} e\,\frac{\sin x}{x}$

UNIVERSITÄT WÜRZBURG
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. J. Steuding, J. Jordan

Wintersemester 07/08
28.11.2007

7 . Übung zur Analysis III

Abgabe: Bis , Mittwoch 5.12.2007, 12:00 Uhr, Briefkästen an der Mathematik-Bibliothek.

7.1 Es sei e_j der kanonische j-te Einheitsvektor im n-dimensionelen euklidischen Raum. Bestimmen Sie das Volumen des n-dimensionalen Einheitssimplex

$$E_n := \left\{ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j \;\middle|\; \lambda_j \geq 0, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \leq 1 \right\}$$

7.2 Es sei

$$P := \int_0^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{1+xy} \, dx \, dy.$$

a) Zeigen Sie:

$$P = 2 \int_0^1 \sum_{l=0}^{\infty} \frac{y^{2l}}{(2l+1)} \, dy.$$

b) Zeigen Sie:

$$P = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

c) Zeigen Sie:

$$P = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \arctan \frac{1+u}{\sqrt{1-u^2}} \, du$$

Hinweis: Versuchen Sie es mit der Substitution $u(x) = x + \frac{y}{2}(x^2 - 1)$.

d) Zeigen Sie:

$$P = \frac{\pi^2}{4}.$$

Hinweis: Versuchen Sie es mit der Substitution $u = -\cos(2\varphi)$.

e) Zeigen Sie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$