Ana I

- **Zwischenwertsatz**: Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) < 0 < f(b)$. Dann besitzt f eine Nullstelle in (a,b).
- **Mittelwertsatz** Sei $a < b$ und $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und in (a,b) differenzierbar. Dann gibt es ein $x \in (a,b)$ mit $f'(x) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
- **Wohlgeordneter Körper**: Anordnungsaxiome: $x > 0 \ \vee x = 0 \vee \ -x > 0$
- **Angeordnete Körper**: $\mathbb{R}, \mathbb{Q}$. $\mathbb{C}$ ist nicht angeordnet.
- **Dreiecksungleichung**: $|x+y| \leq |x| + |y|$
- **Bernoullische Ungleichung**: $(1+x)^n \geq 1 + n \cdot x$ für $n \in \mathbb{N}$ und $x \geq -1$
- Jede beschränkte **monotone** Folge konvergiert und jede konvergente Folge ist beschränkt
- Ein Intervall heisst **kompakt**, wenn es beschränkt und abgeschlossen ist. [Grenzen ex. und werden angenommen.]
- **Riemannsche Umordnungssatz**: Jede Umordung einer absolut konvergenten Reihe konvergiert gegen den selben Grenzwert
- **Konvergenz**:
  * **Definition**: zu jedem $\varepsilon > 0 \ \exists \ N \in \mathbb{N}$, so dass gilt: $|a_n - a| < \ \varepsilon \ \forall \ n > N$
  * **Cauchy-Folge**: sei $(a_n)_n$ eine Folge reeller oder komplexer Zahlen, dann gilt: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n)_n$ konv. $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \ N \in \mathbb{N}$, so dass $| \sum\limits_{n=k}^{m} a_n | < \varepsilon \ \ \forall k, m \geq N$
  * Jede konvergente Folge ist beschränkt
  - **Leibnizsche Konvergenzkriterium** (alternierende Nullfolge):Sei $(a_n)_n$ eine monoton fallende Nullfolge nichtnegativer Zahlen, dann konvergiert $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$.
  - **Quotientenkriterium**: Sei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Reihe mit $a_n \neq 0 \ \forall \ n \geq N \ \exists \ \alpha$ mit $0 < \alpha < 1$, so dass $| \frac{a_{n+1}}{a_n} | < \alpha \ \ \forall \ n > N$, dann konvergiert a_n absolut.
  - **Majorantenkriteium**: *sei* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *eine konvergente Reihe mit*
    $b_n > 0$ *und* $(a_n)_n$ *eine Folge reeller Zahlen mit* $| a_n | \leq b_n$ *fuer fast alle* $n \in \ \mathbb{N}$.
    Dann konvergiert $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolut.*
  - **Minorantenkriterium**: analog $\Rightarrow$ divergente Folge.
  - Cauchy-Produkt: sind $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ **absolut** konvergent, so gilt
    $(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n) \cdot (\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ mit $c_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_k b_{n-k}$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergiert absolut!
  - $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergiert* $\to \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ (Umkehrung gilt i.A. nicht!)
  - Existieren $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$*und* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$, *so gilt* :
    * $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
    * $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

- einige wichtige konvergente Reihen:
  * $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (kann häufig als Majorante benutzt werden)
  * $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot(n+m)} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m} \cdot (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+m})$ **(Teleskopsumme)**
  * unendliche geometrische Reihe: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n \to \frac{1}{1-x}\ falls \mid x \mid < 1$
  * $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} = \frac{\frac{(n+1)^2}{s^{n+1}}}{\frac{n^2}{2}}$
  * $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 2$
  * $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{s^n} + \frac{(-1)^n}{3^k})$
  * $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \cdot x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$
- wichtige konvergente Folge:
  * Heron: *sind* $\alpha > 0$ *und* $x_0 > 0$ *reelle Zahlen und ist* $(x_n)_n$ *definiert durch* $x_{(n+1)} = \frac{1}{2} \cdot (x_n + \frac{\alpha}{x_n})$, *dann konvergiert* $(x_n)_n$ *gegen* $\sqrt{\alpha}$

- Fibonacci-Zahlen (häufig Induktion benutzbar):
  * $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(w_1^n - w_2^n)$ *mit* $w_1 = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ *und* $w_2 = \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$
  * $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = w_1$
- Dirichlet-Funktion: $\vartheta : [0,1] \to \{0,1\},\ \ x \mapsto \vartheta(x) = \begin{cases} 1 \text{ falls } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 \text{ sonst.} \end{cases}$
- wichtige Grenzwerte / Umformungen:
  * $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{log(n)}{n} = 0$
  * $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
  * $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2sin(x)cos(x)}{-2sin(2x)} = -\frac{1}{2}$
  * Endl. geom. Reihe: $\sum\limits_{n=0}^{m} x^n = \frac{1-x^{m+1}}{1-x}$
  * $\sum\limits_{j=1}^{n} j = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$
  * $\sum\limits_{j=1}^{n} j^2 = \frac{(n+1)(2\cdot n+1)n}{6}$
  * $\lim\limits_{n\to\infty} (1+\frac{x}{n})^n = \exp(x)$
  * $\log(x) = o(x)$
- Exponentialfunktionen / trigonmetrische Funktionen:
  * Exponentialreihe: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$ [ist abs. konvergent] [e ist irrational]
  * Eulersche Formel: $exp(ix) = cos(x) + i \cdot sin(x)$
  * exp wächst schneller als jede Potenz von x
  - * $x^n = exp(n \cdot log(x))$
    * $cos(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!}$
    * $exp(x+y) = exp(x) \cdot exp(y)$
    - $\frac{sin(x)}{x} = 1 + o(x^2)$
    - $sin(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
    - $log(x \cdot y) = log(x) + log(y)$

* Additionstheoreme:
  * $cos(x+y) = cos(x)cos(y) - sin(x)sin(y)$
  * $sin(x+y) = cos(x)sin(y) + sin(x)cos(y)$
  * $sin(x) - sin(y) = 2 \cdot cos(\frac{x+y}{2})sin(\frac{x-y}{2})$
  * $sin(2x) = 2sin(x) \cdot cos(x)$
* Ableitungen: $(cos(x))' = -sin(x),\ (sin(x))' = cos(x),\ (tan(x))' = \frac{1}{(cos(x))^2}$
  * $\cos(x) = \frac{1}{2}(\exp(ix) + \exp(-ix))$,
    $\sin(x) = \frac{1}{2i}(\exp(ix) - \exp(-ix))$
  * $\cos(-x) = \cos(x)$, $\sin(-x) = -\sin(x)$ (cos gerade, sin ungerade)
  * $\cos(x) = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$, $\sin(x) = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$

- Komplexe Zahlen: $\mathbb{C}$
  * $z = a + bi$, dabei gilt: a=Re(z), b=Im(z)
  * $\bar{z} = a - bi$
  * $\mid z \mid = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$
  * $(1+i)^2 = 2 \cdot i$, $i^{2k} = (-1)^k$, $\frac{1}{i} = -i$
  * $a = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$, $b = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$
- Stetigkeit:
  * Stetig: 'Grenzwert von links = Grenzwert von rechts = Funktionswert'
  * Tipp: $\delta - \varepsilon$-Kriterium zum Beweisen und Definition zum Wiederlegen
  * $f : D \to \mathbb{R}$ ist genau dann stetig in D, wenn gilt: Zu jedem $\varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$, so dass $\mid f(x) - f(a) \mid <\ \varepsilon\ \forall\ x \in D$ mit $\mid x - a \mid < \delta$
  * $f : D \to \mathbb{R}$ heisst gleichmässig stetig in D , wenn $\forall\ \varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass $\forall\ x, y \in D$ mit $\mid x - y \mid < \delta$ gilt: $\mid f(x) - f(y) \mid < \varepsilon$ [Steigung geht nie gegen ∞]
- Differenzierbarkeit:
  * $f : D \to \mathbb{R}$ ist im Punkt x differnzierbar, wenn der Grenzwert $f'(x) := \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ existert
- Landau-Symbole
  * $f(x) = o(g(x)) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$
  * $f(x) = O(g(x)) \Leftrightarrow \limsup\limits_{x \to \infty} \frac{|f(x)|}{g(x)} < \infty$
- Substitutionsregel: Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $\phi([a, b]) \subset I$. Dann gilt

$$\int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)dt = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)dx$$

- Partielle Integration: Es seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) \mid_{x=a}^{b} - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

- jede stetige Funktion ist Riemanintegrierbar

- Einige 'Zahlen'
  - $e^0 = 1$ * $e^1 = 2,71828$ * $\log(1) = 0$ * $\log(e) = 1$

	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{4}$
$\sin(x)$	0	1	0	-1
$\cos(x)$	1	0	-1	0
$\exp(ix)$	1	i	-1	$-i$

  - $\sin(x) = 0 \quad x = k\pi$
  - $\cos(x) = 0 \quad x = k\pi + \frac{\pi}{2}$

- Binomialkoeffizient
  - $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{n!(n-k)!} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$
  - $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$

- Ergänzungen
  - $\log_c a = \frac{\log_b a}{\log_b c}$
  - surjektiv: limes links und rechts; Fkt. stetig; Zwischenwertsatz: jeder wert wird min einma angenommen
  - Ex. limes a_n und b_n, d.h. a_n und b_n sind konvergent
  - $a_n \leq b_n \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$
  - Bolzano-Weierstrass: Jede beschränkte Folge reeller Zahlen besitzt konvergente Teilfolge
  - $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $a_n \geq 0$ konvergiert genau dann, wenn Folge der Partialsummen (d.h. die Reihe) beschränkt ist.
  - Verknüpfung zweier stetiger/differenzierbarer Funktionen ist wieder stetig/differenzierbar:
    - $f + g$ * $f \cdot g$ * $\frac{f}{g}$ * $f \circ g$
  - rationale Funktionen sind stetig im Defbereich

- ein paar Ableitungen:
  - $(ln(x))' = \frac{1}{x}$
  - $(arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
  - $(arccos(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
  - $(arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}$

- Sinus-/Cosinus Hyperbolicus:
  - $sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
  - $cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

Ana II

- **Metrik:**
  - $d(x,y)=0 \;\Leftrightarrow\; x=y$ $\qquad$ $d(y,x)\geq 0 \;\forall\, x,y\in\mathbb{R}$
  - $d(x,y)=d(y,x)\;\forall\, x,y$ (Symmetrie)
  - $d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)\;\forall\, x,y,z$ ($\triangle$-Ungleichung)
  - triviale Metrik: $d(x,y)=\begin{cases}0, x=y\\ 1, x\neq y\end{cases}$
- **Norm:** (Abb. $V\to\mathbb{R}$)
  - $\|x\|=0\Leftrightarrow x=0$
  - $\|\lambda x\|=|\lambda|\cdot\|x\|\;\;\forall\, x\in V,\lambda\in\mathbb{K}$
  - $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|\;\;\forall\, x,y\in V$
  - Euklidische Norm: $\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}=\sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}$
  - Maximums-Norm: $\|.\|_\infty := \max\{|x_1|,...,|x_n|\}$ $\quad\|.\|_\infty\leq\|.\|\leq\sqrt{n}\,\|.\|_\infty$
  - Supremums-Norm: $\|f\|_x := \sup\{|f(x)|\;\mid\; x\in X\}$
- **Cauchy-Schwarz-Ungleichung**: $a_n, b_n\in\mathbb{C}$: $\left|\sum\limits_{j=1}^n a_j\,\overline{b_j}\right|^2 \;\leq\; \sum\limits_{j=1}^n |a_j|^2\cdot\sum\limits_{j=1}^n |b_j|^2$
- **Topologische Grundbegriffe**: (X,d) metrischer Raum, $E\subset X$
  - Innerer Punkt: $\exists$ Umgebung U von a mit $U\subset E$
  - Häufungspunkt: Jede $\varepsilon-$Umgebung von $a\in X$ enthält ein $(a\neq)b\in E$
  - Isolierter Punkt: $a\in E$ und kein Häufungspunkt von E
  - offen: jeder Punkt ist ein innerer Punkt von E (Bsp. für nicht offen: Folge mit Konvergenz auf Rand)
  - abgeschlossen: jeder Häufungspunkt von E liegt in E
  - E abgeschlossen $\Leftrightarrow$ Jede Folge x_n konvergiert in E mit GW $a=\lim x_n\in E$
  - E dicht in X: jedes $a\in X$ Häufungspunkt oder Punkt von E (Bsp. $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$)
  - Randpunkt: in jeder Umgebung liegt ein Punkt von E als auch von $X\backslash E$
  - beschränkt: endlicher Diameter
  - Diam (U) $=\sup\limits_{x,y\in U}\|x-y\|=\sup\{d(x,y)\mid x,y\in A\}$
  - *kompakt*: in $K\subset\mathbb{R}^n$: $[\Leftrightarrow]$ abgeschlossen und beschränkt
  - *kompakt*: allgemein
    $\Leftrightarrow$ jede offene Überdeckung hat endl. Teilüberdeckung (Gegenbsp.)
    $\Leftrightarrow$ jede Folge aus X konvergiert in X
    $\underline{\Rightarrow}$ beschränkt und abgeschlossen
  - Kompaktheit überträgt sich auf abgeschl. Teilmengen
  - Sei X ein metrischer Raum. Dann gelten:
    (i) $E\subset X$ ist offen \ abgeschlossen $\Longleftrightarrow$ E^c ist abgeschlossen \ offen.
    (ii) $E\subset X$ offen $\Rightarrow$ nicht abgeschlossen
    (iii) $\emptyset$ und X sind sowohl offen als auch abgeschlossen.
    (iiv) Für jede Familie $\mathcal{E}=\{E_j\}$ von offenen Mengen ist $\bigcup\limits_j E_j$ offen;
    ist $\mathcal{E}$ endlich, so ist $\bigcap\limits_{j=1}^n E_j$ offen.
    (v) Für jede Familie $\mathcal{F}=\{F_k\}$ von abgeschlossenen Mengen ist $\bigcap\limits_k F_k$ abgeschl;
    ist $\mathcal{F}$ endlich, so ist $\bigcup\limits_{k=1}^n F_k$ abgeschlossen.
  - Sei X ein metrischer Raum und $E\subset X$. Dann gilt
    1. $E\backslash\partial E$ ist offen (Rand: ∂E; abgeschl. Hülle: $\overline{E}$)
    2. $\overline{E}=E\cup\partial E$ ist abgeschlossen
    3. ∂E ist abgeschlossen
    4. $\overset{\circ}{E}:=E\backslash\partial E$ Innere von E
    5. $E=\overline{E}\Leftrightarrow E$ ist abgeschlossen
    6. Für jede abgeschlossene Menge $F\subset X$ mit $E\subset F$ gilt $E\subset F$
  - Insbesondere ist $\overline{E}$ die kleinste abgeschlossene Teilmenge von X, die E enthält.
  - Einheitsspähre: $\$^{n-1}:=\partial B=\{x\in\mathbb{R}^n\mid\;\|x\|=1\}$

- **konvergente Folgen**
  - (x_n) konvergiert gegen $a \in X$ [$\lim x_n = a$], falls zu jedem $e > 0 \exists N \in \mathbb{N}$ mit $d(x_n, a) < \varepsilon \ \forall \ n \geq N$
  - jede konvergente Folge in einem metrischen Raum ist beschränkt
  - Vollständigkeit: im vollständigen Raum konvergiert jede Cauchy-Folge (Gegenbsp. $\mathbb{Q}$; Bsp. $\mathbb{R}^n$)
  - Satz 2.4 (Intervall-Schachtelungsprinzip) (X, d) vollständiger metrischer Raum und $A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset ...$ eine absteigende Folge abgeschlossener Mengen $A_n \subset X \neq \emptyset$ mit $\lim diam(A_n) = 0$, dann $\exists \ a \in A_0, ..., A_n$
  - E ist vollkommen, wenn abgeschlossen und jeder Pkt. von E gleich Häufungspunkt von E [$E' = E$]
- **Stetigkeit**
  - Kriterien
    * Def.: stetig in einem Punkt a: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, fuer jede Folge x_n mit $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$
      Funktion stetig: stetig in jedem Punkt
    * $\delta - \varepsilon -$*Kriterium*: $f : X \to Y$ ist genau dann stetig in $a \in X$, wenn gilt:
      Zu jedem $\varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0$, so dass $d_Y(f(x), f(a)) \ < \ \varepsilon \ \forall \ x \in X$ mit $d_X(x, a) < \delta$ (für $\mathbb{R}$ siehe Ana I)
  - Folgerungen aus Stetigkeit
    * $f : X \to \mathbb{R}$, f stetig, X kompakt und metrisch $\Rightarrow f$ beschränkt und Min u. Max werden angenommen
    * f stetig $\Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(\lim\limits_{n \to \infty} x_n)$
    * f stetig $\Rightarrow$ Kompaktheit überträgt sich von Urbild auf Bild
    * f stetig auf $X \Leftrightarrow$ Urbild $f^{-1}(V)$ jeder offenen/abgeschlossenen Teilmenge $V \subsetneq Im(f)$ ist offen/abgeschlossen in X
    * f linear $\Rightarrow f$ stetig, wenn f stetig in 0
  - gleichmässig stetig:
    * $f : X \to Y$ ist glm stetig $\Leftrightarrow \forall \ \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0$ mit $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon \ \forall \ x, y \in X$ mit $d_X(x, y) < \delta$
    * $f : X \to Y$ stetig, X kompakt $\Rightarrow f$ gleichmässig stetig
- **Differenzierbarkeit**
  - total diffbar im Punkt x: $\lim\limits_{n \to 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - Ah\|}{\|h\|} = 0$, $A =$ Jacobi-Martix
  - Jacobi-Matrix: $(Df) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$; $a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$;
  - gradient: Jacobi-Matrix fuer $K^n \to K$;
  - Kritische Punkte: a ist KP $\Leftrightarrow$ grad $f(a) = 0$ (grad f : $\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_i} \end{pmatrix}$) [notw. Bed für Extremum]
  - stetig partiell diffbar $\Rightarrow$ (total) diffbar $\Rightarrow f$ stetig und f partiell diffbar
  - Kettenregel: $D(g \circ f)(x) = (Dg)(f(x)) \cdot Df(x)$
  - Richtungsableitung: $D_v(x) = \frac{d}{dt} f(x + tv) = \lim\limits_{t \to 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t} =< v, gradf(x) >$ (wenn $\|v\| = 1$)
  - Satz von Schwarz: f 2 mal stetig partiell diffbar $\Rightarrow$ Vertauschbarkeit der part. Ableitungen
- **Konvergenz von Funktionen**
  - punktweise Konvergenz: $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$
  - gleichmässige Konvergenz: $\forall \ \varepsilon > 0 \ \exists \ N \in \mathbb{N}$, so dass $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \ \forall \ n \geq N \ \forall \ x$
    (d.h. $\lim\limits_{n \to \infty} max(|f_n(x) - f(x)|) = 0$)
- f_n gleichmässig konvergent gegen f: f_n stetig $\Rightarrow f$ stetig
- **Banach'scher Fixpunktsatz**
  - $f : X \to X, \ d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y) \ \forall \ x, y \in X$ mit $c < 1$ (f ist Kontraktion)
    $\Rightarrow f$ hat genau einen Fixpunkt $f(x^*) = x^*$
- **Kurven im $\mathbb{R}^n$:**
  - Länge einer Kurve im $\mathbb{R}^n$: Ist $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ stetig diffbar, so gilt $\Lambda(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt$
  - regulär / nicht-singulär: $\gamma(t)$ stetig diffbar und $\gamma'(t) \neq 0$
  - singulär: Wert t mit $\gamma'(t) = 0$

- **Potenzreihen**
  - Def.: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ (a ist Entwicklungspunkt)
  - Def. Konvergenzradius: $\varrho = \sup\left(|z-a| : \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n konvergiert\right)$
  - Berechnung von ϱ:
    * $\varrho = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ wenn Grenzwert existent und $a_n \neq 0 \;\forall\; n > N$
    * $\varrho = (\lim\limits_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|})^{-1}$
  - Potenzreihe beliebig oft diffbar im Konv.radius
  - Identitätssatz: $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^n;\;\; g(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n z^n;\;\; f(z) = g(z) \;\Rightarrow\; a_n = b_n$
- **Taylor-Approximation**
  - $f(x) = T_k(x) + R_k(x)$ mit $\underline{T_k(x)} = \sum\limits_{m=0}^{k} \frac{f^{(m)}(a)}{m!}(x-a)^m$ und $R_k(x) = \frac{1}{k!}\int\limits_a^x (x-t)^k f^{(k+1)}(t)dt$
  - Sei $a \in \mathbb{R}$ und $f(x)$ Potenzreihe mit pos. Konvergenzradius. Dann ist die Taylor-Reihe gleich der Potenzreihe, innerhalb von ϱ.
  - mehrdimensional:
    * $f(x+h) = \sum\limits_{|\alpha|\leqslant k} \frac{D^\alpha f(x)}{\alpha!}h^\alpha + o(\|h\|^k)$ (fuer $h \to 0$)
  - Hesse-Matrix:
    * Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 2 mal stetig diffbar, so ist die Matrix $(Hessf) := (\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j})_{i,j=1}^n$ die zugehoerige Matrix.
    * (Hess f) ist symmetrisch und $Q(h) := h^T((Hessf)(x))h =< h, (Hessf)(x)h >$ heisst Hesse-Form
  - f 2 mal stetig diffbar, a krit. Punkt von f, dann gilt:
    * (Hess f)(a) pos. definit $\Rightarrow$ a striktes lok. Minimum
    * (Hess f)(a) neg. definit $\Rightarrow$ a striktes lok. Maximum
    * (Hess f)(a) indefinit $\Rightarrow$ a kein lok. Extremum (Sattelpunkt)
- **Lokale Umkehrbarkeit**
  - Seien $U, V \subsetneq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to V$ bijektiv und in $a \in U$ diffbar mit $\det f'(a) \neq 0$. Weiter sei $f^{-1} : V \to U$ in $f(a)$ stetig, dann gilt: $(f^{-1})'(f(a)) = (f'(a))^{-1}$
- **Extremwerte unter Nebenbedingungen**
  - Sei $rgDf = k \forall x \in V$. Ist a ein lokales Extremum von F unter Nebenbedingungen, dann gilt $gradF(a) = \lambda_1 grad(f_1)(a) + \lambda_2 grad(f_2)(a) + \cdots + \lambda_k grad(f_k)(a)$ fuer gewisse $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k \in \mathbb{R}$.
    $f_i(x)$ ist die i-te Nebenbedingung als =0 umgeformt und als Funktion aufgefasst.
  - Vorgehensschema: die k Nebenbedingungen ergeben zusammen mit der Gradientenbedingung $n+k$ Gleichungen; es gibt k unbekannte λ_i und der unbekannte Punkt a setzt sich aus n unbekanten Komponenten zusammen –> es ergibt sich ein $(n+k) \times (n+k)$ Gleichungssystem, dessen Lösung alle 'potentiellen Kandidaten' fuer Extrema sind. Man muss anschließend noch pruefen, ob die 'kritischen Punkte' auch Extrema sind und die Art des Extremums bestimmen.