Ana I

- **Riemannsche Umordnungssatz**: Jede Umordung einer absolut konvergenten Reihe konvergiert gegen den selben Grenzwert
- **Konvergenz**:
  - ∗ **Cauchy-Folge**: sei $(a_n)_n$ eine Folge reeller oder komplexer Zahlen, dann gilt: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n)_n$ konv. $\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \;\; \exists\, N \in \mathbb{N}$, so dass $\mid \sum\limits_{n=k}^{m} a_n \mid < \varepsilon \;\; \forall k, m \geq N$
  - ∗ Jede konvergente Folge ist beschränkt
  - **Leibnizsche Konvergenzkriterium** (alternierende Nullfolge):Sei $(a_n)_n$ eine monoton fallende Nullfolge nichtnegativer Zahlen, dann konvergiert $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$.
  - **Quotientenkriterium**: Sei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Reihe mit $a_n \neq 0 \;\forall\; n \geq N \;\exists\; \alpha$ mit $0 < \alpha < 1$, so dass $\mid \frac{a_{n+1}}{a_n} \mid < \alpha \;\; \forall\; n > N$, dann konvergiert a_n absolut.
  - **Majorantenkriteium**: *sei* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *eine konvergente Reihe mit* $b_n > 0$ *und* $(a_n)_n$ *eine Folge reeller Zahlen mit* $\mid a_n \mid \leq b_n$ *fuer fast alle* $n \in \mathbb{N}$. *Dann konvergiert* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolut.*
  - **Minorantenkriterium**: analog $\Rightarrow$ divergente Folge.
  - einige wichtige konvergente Reihen:
    - ∗ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (kann häufig als Majorante benutzt werden)
    - ∗ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot(n+m)} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{m}\cdot(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+m})$ **(Teleskopsumme)**
    - ∗ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n} = \frac{\frac{(n+1)^2}{s^{n+1}}}{\frac{n^2}{2}}$ ∗ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = 2$
    - ∗ $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{s^n} + \frac{(-1)^n}{3^k})$ ∗ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\cdot x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$
  - wichtige konvergente Folge:
    - ∗ Heron: *sind* $\alpha > 0$ *und* $x_0 > 0$ *reelle Zahlen und ist* $(x_n)_n$ *definiert durch* $x_{(n+1)} = \frac{1}{2}\cdot(x_n + \frac{\alpha}{x_n})$, *dann konvergiert* $(x_n)_n$ *gegen* $\sqrt{\alpha}$
- wichtige Grenzwerte / Umformungen:
  - ∗ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{log(n)}{n} = 0$ ∗ $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$ ∗ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2sin(x)cos(x)}{-2sin(2x)} = -\frac{1}{2}$
  - ∗ Endl. geom. Reihe: $\sum\limits_{n=0}^{m} x^n = \frac{1-x^{m+1}}{1-x}$
  - ∗ $\sum\limits_{j=1}^{n} j = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$ ∗ $\sum\limits_{j=1}^{n} j^2 = \frac{(n+1)(2\cdot n+1)n}{6}$
  - ∗ $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n = \exp(x)$ ∗ $\log(x) = o(x)$
- Exponentialfunktionen / trigonmetrische Funktionen:
  - ∗ Exponentialreihe: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = e^x$ [ist abs. konvergent] [e ist irrational]
  - ∗ Eulersche Formel: $exp(ix) = cos(x) + i\cdot sin(x)$
  - ∗ $x^n = exp(n\cdot log(x))$ • $\frac{sin(x)}{x} = 1 + o(x^2)$
    ∗ $cos(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ • $sin(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
  - ∗ Additionstheoreme:
    - ∗ $cos(x+y) = cos(x)cos(y) - sin(x)sin(y)$; $sin(x+y) = cos(x)sin(y) + sin(x)cos(y)$;
    - ∗ $sin(x) - sin(y) = 2\cdot cos(\frac{x+y}{2})sin(\frac{x-y}{2})$; $sin(2x) = 2sin(x)\cdot cos(x)$
  - ∗ Ableitungen: $(cos(x))' = -sin(x),\;(sin(x))' = cos(x),\;(tan(x))' = \frac{1}{(cos(x))^2}$
    - ∗ $\cos(x) = \frac{1}{2}(\exp(ix) + \exp(-ix))$, $\sin(x) = \frac{1}{2i}(\exp(ix) - \exp(-ix))$
    - ∗ $\cos(-x) = \cos(x)$, $\sin(-x) = -\sin(x)$ (cos gerade, sin ungerade)
    - ∗ $\cos(x) = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$, $\sin(x) = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$

Ana II

- **Metrik:**
  - $d(x,y) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = y$ $\qquad d(y,x) \geq 0 \;\forall\, x,y \in \mathbb{R}$
  - $d(x,y) = d(y,x) \;\forall\, x,y$ (Symmetrie)
  - $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \;\forall\, x,y,z$ ($\triangle$-Ungleichung)
  - triviale Metrik: $d(x,y) = \begin{cases} 0, x=y \\ 1, x \neq y \end{cases}$
- **Norm:** (Abb. $V \to \mathbb{R}$)
  - $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
  - $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \;\;\forall\, x \in V, \lambda \in \mathbb{K}$
  - $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \;\;\forall\, x,y \in V$
  - Euklidische Norm: $\|x\| = \sqrt{\langle x,x \rangle} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}$
  - Maximums-Norm: $\|.\|_\infty := \max\{|x_1|, ..., |x_n|\}$ $\quad \|.\|_\infty \leq \|.\| \leq \sqrt{n}\,\|.\|_\infty$
  - Supremums-Norm: $\|f\|_x := \sup\{|f(x)| \;\mid\; x \in X\}$
- **Cauchy-Schwarz-Ungleichung**: $a_n, b_n \in \mathbb{C}$: $\left|\sum\limits_{j=1}^{n} a_j \; \overline{b_j}\right|^2 \;\leq\; \sum\limits_{j=1}^{n} |a_j|^2 \cdot \sum\limits_{j=1}^{n} |b_j|^2$
- **Topologische Grundbegriffe**: (X,d) metrischer Raum, $E \subset X$
  - Innerer Punkt: $\exists$ Umgebung U von a mit $U \subset E$
  - Häufungspunkt: Jede $\varepsilon-$Umgebung von $a \in X$ enthält ein $(a \neq) b \in E$
  - Isolierter Punkt: $a \in E$ und kein Häufungspunkt von E
  - offen: jeder Punkt ist ein innerer Punkt von E (Bsp. für nicht offen: Folge mit Konvergenz auf Rand)
  - abgeschlossen: jeder Häufungspunkt von E liegt in E
  - E abgeschlossen $\Leftrightarrow$ Jede Folge x_n konvergiert in E mit GW $a = \lim x_n \in E$
  - E dicht in X: jedes $a \in X$ Häufungspunkt oder Punkt von E (Bsp. $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$)
  - Randpunkt: in jeder Umgebung liegt ein Punkt von E als auch von $X \backslash E$
  - beschränkt: endlicher Diameter
  - Diam (U) $= \sup\limits_{x,y \in U} \|x-y\| = \sup\{d(x,y) \mid x,y \in A\}$
  - *kompakt*: in $K \subset \mathbb{R}^n$: [$\Leftrightarrow$] abgeschlossen und beschränkt
  - *kompakt*: allgemein
    - $\Leftrightarrow$ jede offene Überdeckung hat endl. Teilüberdeckung (Gegenbsp.)
    - $\Leftrightarrow$ jede Folge aus X konvergiert in X
    - $\underline{\Rightarrow}$ beschränkt und abgeschlossen
  - Kompaktheit überträgt sich auf abgeschl. Teilmengen
  - Sei X ein metrischer Raum. Dann gelten:
    - (i) $E \subset X$ ist offen \ abgeschlossen $\Longleftrightarrow$ E^c ist abgeschlossen \ offen.
    - (ii) $E \subset X$ offen $\Rightarrow$ nicht abgeschlossen
    - (iii) $\emptyset$ und X sind sowohl offen als auch abgeschlossen.
    - (iiv) Für jede Familie $\mathcal{E} = \{E_j\}$ von offenen Mengen ist $\bigcup\limits_j E_j$ offen;

      ist $\mathcal{E}$ endlich, so ist $\bigcap\limits_{j=1}^{n} E_j$ offen.
    - (v) Für jede Familie $\mathcal{F} = \{F_k\}$ von abgeschlossenen Mengen ist $\bigcap\limits_k F_k$ abgeschl;

      ist $\mathcal{F}$ endlich, so ist $\bigcup\limits_{k=1}^{n} F_k$ abgeschlossen.
  - Sei X ein metrischer Raum und $E \subset X$. Dann gilt
    1. $E \backslash \partial E$ ist offen (Rand: ∂E; abgeschl. Hülle: $\overline{E}$)
    2. $\overline{E} = E \cup \partial E$ ist abgeschlossen
    3. ∂E ist abgeschlossen
    4. $\overset{\circ}{E} := E \backslash \partial E$ Innere von E
    5. $E = \overline{E} \Leftrightarrow E$ ist abgeschlossen
    6. Für jede abgeschlossene Menge $F \subset X$ mit $E \subset F$ gilt $E \subset F$
  - Insbesondere ist $\overline{E}$ die kleinste abgeschlossene Teilmenge von X, die E enthält.
  - Einheitsspähre: $\$^{n-1} := \partial B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$

- **konvergente Folgen**
  - (x_n) konvergiert gegen $a \in X$ [$\lim x_n = a$], falls zu jedem $e > 0 \exists N \in \mathbb{N}$ mit $d(x_n, a) < \varepsilon \ \forall \ n \geq N$
  - jede konvergente Folge in einem metrischen Raum ist beschränkt
  - Vollständigkeit: im vollständigen Raum konvergiert jede Cauchy-Folge (Gegenbsp. $\mathbb{Q}$; Bsp. $\mathbb{R}^n$)
  - Satz 2.4 (Intervall-Schachtelungsprinzip) (X, d) vollständiger metrischer Raum und $A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset ...$ eine absteigende Folge abgeschlossener Mengen $A_n \subset X \neq \emptyset$ mit $\lim diam(A_n) = 0$, dann $\exists \ a \in A_0, ..., A_n$
  - E ist vollkommen, wenn abgeschlossen und jeder Pkt. von E gleich Häufungspunkt von E [$E' = E$]
- **Stetigkeit**
  - Kriterien
    * Def.: stetig in einem Punkt a: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, fuer jede Folge x_n mit $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$
      Funktion stetig: stetig in jedem Punkt
    * $\delta - \varepsilon -$*Kriterium*: $f : X \to Y$ ist genau dann stetig in $a \in X$, wenn gilt:
      Zu jedem $\varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0$, so dass $d_Y(f(x), f(a)) \ < \ \varepsilon \ \forall \ x \in X$ mit $d_X(x, a) < \delta$ (für $\mathbb{R}$ siehe Ana I)
  - Folgerungen aus Stetigkeit
    * $f : X \to \mathbb{R}$, f stetig, X kompakt und metrisch $\Rightarrow f$ beschränkt und Min u. Max werden angenommen
    * f stetig $\Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(\lim\limits_{n \to \infty} x_n)$
    * f stetig $\Rightarrow$ Kompaktheit überträgt sich von Urbild auf Bild
    * f stetig auf $X \Leftrightarrow$ Urbild $f^{-1}(V)$ jeder offenen/abgeschlossenen Teilmenge $V \subsetneq Im(f)$ ist offen/abgeschlossen in X
    * f linear $\Rightarrow f$ stetig, wenn f stetig in 0
  - gleichmässig stetig:
    * $f : X \to Y$ ist glm stetig $\Leftrightarrow \forall \ \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0$ mit $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon \ \forall \ x, y \in X$ mit $d_X(x, y) < \delta$
    * $f : X \to Y$ stetig, X kompakt $\Rightarrow f$ gleichmässig stetig
- **Differenzierbarkeit**
  - total diffbar im Punkt x: $\lim\limits_{n \to 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - Ah\|}{\|h\|} = 0$, $A =$ Jacobi-Martix
  - Jacobi-Matrix: $(Df) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$; $a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$;
  - gradient: Jacobi-Matrix fuer $K^n \to K$;
  - Kritische Punkte: a ist KP $\Leftrightarrow$ grad $f(a) = 0$ (grad f : $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right)$) [notw. Bed für Extremum]
  - stetig partiell diffbar $\Rightarrow$ (total) diffbar $\Rightarrow f$ stetig und f partiell diffbar
  - Kettenregel: $D(g \circ f)(x) = (Dg)(f(x)) \cdot Df(x)$
  - Richtungsableitung: $D_v(x) = \frac{d}{dt} f(x + tv) = \lim\limits_{t \to 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t} =< v, gradf(x) >$ (wenn $\|v\| = 1$)
  - Satz von Schwarz: f 2 mal stetig partiell diffbar $\Rightarrow$ Vertauschbarkeit der part. Ableitungen
- **Konvergenz von Funktionen**
  - punktweise Konvergenz: $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$
  - gleichmässige Konvergenz: $\forall \ \varepsilon > 0 \ \exists \ N \in \mathbb{N}$, so dass $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \ \forall \ n \geq N \ \forall \ x$
    (d.h. $\lim\limits_{n \to \infty} max(|f_n(x) - f(x)|) = 0$)
- f_n gleichmässig konvergent gegen f: f_n stetig $\Rightarrow f$ stetig
- **Banach'scher Fixpunktsatz**
  - $f : X \to X$, $d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y) \ \forall \ x, y \in X$ mit $c < 1$ (f ist Kontraktion)
    $\Rightarrow f$ hat genau einen Fixpunkt $f(x^*) = x^*$
- **Kurven im $\mathbb{R}^n$**:
  - Länge einer Kurve im $\mathbb{R}^n$: Ist $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ stetig diffbar, so gilt $\Lambda(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt$
  - regulär / nicht-singulär: $\gamma(t)$ stetig diffbar und $\gamma'(t) \neq 0$
  - singulär: Wert t mit $\gamma'(t) = 0$
- ein paar Ableitungen:
  - $(ln(x))' = \frac{1}{x}$; $(arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $(arccos(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $(arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}$;
- Sinus-/Cosinus Hyperbolicus: $sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$; $cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$;

- **Potenzreihen**
  - Def.: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ (a ist Entwicklungspunkt)
  - Def. Konvergenzradius: $\varrho = \sup\left(|z-a| : \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n konvergiert\right)$
  - Berechnung von ϱ:
    * $\varrho = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ wenn Grenzwert existent und $a_n \neq 0 \; \forall \; n > N$
    * $\varrho = (\lim\limits_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|})^{-1}$
  - Potenzreihe beliebig oft diffbar im Konv.radius
  - Identitätssatz: $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^n;\; g(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n z^n;\; f(z) = g(z) \;\Rightarrow\; a_n = b_n$
- **Taylor-Approximation**
  - $f(x) = T_k(x) + R_k(x)$ mit $\underline{T_k(x)} = \sum\limits_{m=0}^{k} \frac{f^{(m)}(a)}{m!}(x-a)^m$ und $R_k(x) = \frac{1}{k!}\int\limits_a^x (x-t)^k f^{(k+1)}(t)dt$
  - Sei $a \in \mathbb{R}$ und $f(x)$ Potenzreihe mit pos. Konvergenzradius. Dann ist die Taylor-Reihe gleich der Potenzreihe, innerhalb von ϱ.
  - mehrdimensional:
    * $f(x+h) = \sum\limits_{|\alpha|\leqslant k} \frac{D^\alpha f(x)}{\alpha!} h^\alpha + o(\|h\|^k)$ (fuer $h \to 0$)
    * Startglied: $f(x+h) = \sum\limits_{|\alpha|\leqslant k} \frac{D^\alpha f(x)}{\alpha!} h^\alpha$ bzw. $f(x) = \sum\limits_{|\alpha|\leqslant k} \frac{D^\alpha f(a)}{\alpha!}(x-a)^\alpha$
    * Restglied:
      · $+ \sum\limits_{|\alpha|=k} \frac{D^\alpha f(x+\theta h)}{\alpha!} h^\alpha$ (für $\theta \in [0,1]$)
      · $+o(\|h\|^k)$ (fuer $h \to 0$)
  - Hesse-Matrix:
    * Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 2 mal stetig diffbar, so ist die Matrix $(Hessf) := (\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j})_{i,j=1}^n$ die zugehoerige Matrix.
    * (Hess f) ist symmetrisch und $Q(h) := h^T((Hessf)(x))h =< h, (Hessf)(x)h >$ heisst Hesse-Form
  - f 2 mal stetig diffbar, a krit. Punkt von f, dann gilt:
    * (Hess f)(a) pos. definit $\Rightarrow$ a striktes lok. Minimum
    * (Hess f)(a) neg. definit $\Rightarrow$ a striktes lok. Maximum
    * (Hess f)(a) indefinit $\Rightarrow$ a kein lok. Extremum (Sattelpunkt)
- **Lokale Umkehrbarkeit**
  - Seien $U, V \subsetneq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to V$ bijektiv und in $a \in U$ diffbar mit $\det f'(a) \neq 0$. Weiter sei $f^{-1} : V \to U$ in $f(a)$ stetig, dann gilt: $(f^{-1})'(f(a)) = (f'(a))^{-1}$
- **Extremwerte unter Nebenbedingungen**
  - Sei $rgDf = k \forall x \in V$. Ist a ein lokales Extremum von F unter Nebenbedingungen, dann gilt $gradF(a) = \lambda_1 grad(f_1)(a) + \lambda_2 grad(f_2)(a) + \cdots + \lambda_k grad(f_k)(a)$ fuer gewisse $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k \in \mathbb{R}$.
    $f_i(x)$ ist die i-te Nebenbedingung als =0 umgeformt und als Funktion aufgefasst.
  - Vorgehensschema: die k Nebenbedingungen ergeben zusammen mit der Gradientenbedingung $n+k$ Gleichungen; es gibt k unbekannte λ_i und der unbekannte Punkt a setzt sich aus n unbekanten Komponenten zusammen –> es ergibt sich ein $(n+k) \times (n+k)$ Gleichungssystem, dessen Lösung alle 'potentiellen Kandidaten' fuer Extrema sind. Man muss anschließend noch pruefen, ob die 'kritischen Punkte' auch Extrema sind und die Art des Extremums bestimmen.
- **Integral** (Ana1)
  - Substitutionsregel: Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $\phi([a,b]) \subset I$. Dann gilt
  $$\int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)dt = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)dx$$
  - Partielle Integration: Es seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann gilt
  $$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) \,|_{x=a}^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$
- Landau-Symbole
  * $f(x) = o(g(x)) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$
  * $f(x) = O(g(x)) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\infty}\sup \frac{|f(x)|}{g(x)} < \infty$
- Logarithmusreihe: Für $-1 < x \leqslant 1$: $log(1+x) = \sum\limits_{n=1}^{\inf} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$; Für $-1 \leqslant x < 1$: $log(1-x) = -\sum\limits_{n=1}^{\inf} \frac{1}{n} x^n$