Ana I

- **Zwischenwertsatz**: Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) < 0 < f(b)$. Dann besitzt f eine Nullstelle in (a,b).
- **Mittelwertsatz** Sei $a < b$ und $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und in (a,b) differenzierbar. Dann gibt es ein $x \in (a,b)$ mit $f'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
- **Riemannsche Umordnungssatz**: Jede Umordung einer absolut konvergenten Reihe konvergiert gegen den selben Grenzwert
- **Konvergenz**:
  - * **Definition**: zu jedem $\varepsilon > 0 \ \exists\ N \in \mathbb{N}$, so dass gilt: $|a_n - a| < \varepsilon \ \forall\ n > N$
  - * **Cauchy-Folge**: sei $(a_n)_n$ eine Folge reeller oder komplexer Zahlen, dann gilt: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n)_n$ konv. $\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \ \exists\ N \in \mathbb{N}$, so dass $|\sum\limits_{n=k}^{m} a_n| < \varepsilon \ \ \forall k, m \geq N$
  - * Jede konvergente Folge ist beschränkt
  - **Leibnizsche Konvergenzkriterium** (alternierende Nullfolge):Sei $(a_n)_n$ eine monoton fallende Nullfolge nichtnegativer Zahlen, dann konvergiert $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$.
  - **Quotientenkriterium**: Sei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Reihe mit $a_n \neq 0 \ \forall\ n \geq N \ \exists\ \alpha$ mit $0 < \alpha < 1$, so dass $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| < \alpha \ \ \forall\ n > N$, dann konvergiert a_n absolut.
  - **Majorantenkriteium**: *sei* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *eine konvergente Reihe mit* $b_n > 0$ *und* $(a_n)_n$ *eine Folge reeller Zahlen mit* $|a_n| \leq b_n$ *fuer fast alle* $n \in \mathbb{N}$. *Dann konvergiert* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolut.*
  - **Minorantenkriterium**: analog $\Rightarrow$ divergente Folge.
  - Cauchy-Produkt: sind $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ **absolut** konvergent, so gilt $(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n) \cdot (\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ mit $c_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_k b_{n-k}$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergiert absolut!
  - $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergiert* $\to \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ (Umkehrung gilt i.A. nicht!)
  - Existieren $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ *und* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$, *so gilt* :
    - * $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
    - * $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
  - einige wichtige konvergente Reihen:
    - * $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (kann häufig als Majorante benutzt werden)
    - * $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot(n+m)} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m} \cdot (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+m})$ **(Teleskopsumme)**
    - * unendliche geometrische Reihe: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n \to \frac{1}{1-x}$ *falls* $|x| < 1$
      - * $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} = \frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2}}$ * $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 2$
      - * $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{s^n} + \frac{(-1)^n}{3^k})$ * $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \cdot x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$
  - wichtige konvergente Folge:
    - * Heron: *sind* $\alpha > 0$ *und* $x_0 > 0$ *reelle Zahlen und ist* $(x_n)_n$ *definiert durch* $x_{(n+1)} = \frac{1}{2} \cdot (x_n + \frac{\alpha}{x_n})$, *dann konvergiert* $(x_n)_n$ *gegen* $\sqrt{\alpha}$
- Fibonacci-Zahlen (häufig Induktion benutzbar):
  - * $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(w_1^n - w_2^n)$ *mit* $w_1 = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ *und* $w_2 = \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$
  - * $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = w_1$
- Dirichlet-Funktion: $\vartheta : [0,1] \to \{0,1\}, \ x \mapsto \vartheta(x) = \begin{cases} 1 \text{ falls } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 \text{ sonst.} \end{cases}$
- wichtige Grenzwerte / Umformungen:
  - * $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{log(n)}{n} = 0$ * $\lim\limits_{n\to\infty} {}^n\sqrt{n} = 1$ * $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2sin(x)cos(x)}{-2sin(2x)} = -\frac{1}{2}$
  - * Endl. geom. Reihe: $\sum\limits_{n=0}^{m} x^n = \frac{1-x^{m+1}}{1-x}$
  - * $\sum\limits_{j=1}^{n} j = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$ * $\sum\limits_{j=1}^{n} j^2 = \frac{(n+1)(2\cdot n+1)n}{6}$
  - * $\lim\limits_{n\to\infty}(1 + \frac{x}{n})^n = \exp(x)$ * $\log(x) = o(x)$
- Exponentialfunktionen / trigonmetrische Funktionen:
  - * Exponentialreihe: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$ [ist abs. konvergent] [e ist irrational]
  - * Eulersche Formel: $exp(ix) = cos(x) + i \cdot sin(x)$
  - * exp wächst schneller als jede Potenz von x
    - * $x^n = exp(n \cdot log(x))$ • $\frac{sin(x)}{x} = 1 + o(x^2)$
    - * $cos(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ • $sin(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
    - * $exp(x+y) = exp(x) \cdot exp(y)$ • $log(x \cdot y) = log(x) + log(y)$
  - * Additionstheoreme:
    - * $cos(x+y) = cos(x)cos(y) - sin(x)sin(y)$
    - * $sin(x+y) = cos(x)sin(y) + sin(x)cos(y)$
    - * $sin(x) - sin(y) = 2 \cdot cos(\frac{x+y}{2})sin(\frac{x-y}{2})$
    - * $sin(2x) = 2sin(x) \cdot cos(x)$
  - * Ableitungen: $(cos(x))' = -sin(x)$, $(sin(x))' = cos(x)$, $(tan(x))' = \frac{1}{(cos(x))^2}$
    - * $\cos(x) = \frac{1}{2}(\exp(ix) + \exp(-ix))$, $\sin(x) = \frac{1}{2i}(\exp(ix) - \exp(-ix))$
    - * $\cos(-x) = \cos(x)$, $\sin(-x) = -\sin(x)$ (cos gerade, sin ungerade)
    - * $\cos(x) = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$, $\sin(x) = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$
- Landau-Symbole
  - * $f(x) = o(g(x)) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ * $f(x) = O(g(x)) \Leftrightarrow \limsup\limits_{x\to\infty} \frac{|f(x)|}{g(x)} < \infty$
- Substitutionsregel: Sei $f: I \to \mathbb{R}$ stetig und $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $\phi([a,b]) \subset I$. Dann gilt

$$\int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)dt = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)dx$$

- Partielle Integration: Es seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\,|_{x=a}^{b} - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

- Einige 'Zahlen'
  - * $e^0 = 1$ * $e^1 = 2,71828$ * $\log(1) = 0$ * $\log(e) = 1$

	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{4}$
$\sin(x)$	0	1	0	-1
$\cos(x)$	1	0	-1	0
$\exp(ix)$	1	i	-1	$-i$

  - • $\sin(x) = 0 \ \ x = k\pi$ • $\cos(x) = 0 \ \ x = k\pi + \frac{\pi}{2}$
- Binomialkoeffizient
  - $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{n!(n-k)!} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$
  - $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$

- $\varrho = (\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|})^{-1}$ Konvergenzradius der Potenzreihe mit $a \in \mathbb{C}$
- Ableitungen $f^{(k)}(z)$ haben gleichen Konvergenzradius ϱ wie Funktion $f(z)$
- Identitätssatz: $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^n$; $g(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n z^n$; $f(z) = g(z) \ \Rightarrow \ a_n = b_n$

Taylor-App

- $f(x) = T_k(x) + R_k(x)$
- $T_\infty(x) := \sum_0^\infty \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ mit $a \in \mathbb{R}$ und $f(x) = \sum_0^\infty a_n(x-a)^n$ Potenzreihen mit $\varrho \in (0,\infty)$, dann ist T_∞ identisch mit $f(a-\varrho, a+\varrho) \to \mathbb{R}$
- Trigonometrie: $\sin(x) = \sum_0^\infty (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$; $\cos(x) = \sum_0^\infty (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ konvergent $\forall\ x \in \mathbb{R}$
- Logarithmus: $-1 < x \leq 1$ ist $log(x+1) = \sum_1^\infty (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$; $log(1-x) = \sum_1^\infty (-1)^{k-1}\frac{(-x)^k}{k}$
- $\alpha = -1$, $|x| < 1$, $(1+\alpha)^\alpha = \sum_0^\infty \binom{\alpha}{n} x^n$, $\binom{\alpha}{n} \prod_1^n \frac{\alpha-k+1}{k}$
- $\alpha = -1$: geometrische Reihe; $\alpha = -\frac{1}{2}$: $(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 +$ höhere Terme
- mehrdim: $f(x+h) = \sum\limits_{|\alpha| \leqslant k} \frac{D^\alpha f(x)}{\alpha!} h^\alpha + o(\|h\|^k)$ (fuer $h \to 0$)

Extrema von Fkt. mehrerer Veränderlichen

- Taylor: $T_2(h) = f(x) + \langle grad\ f(x), h\rangle + \frac{1}{2}\langle h, \ (Hess\ f)(x)\ h\rangle + o(\|h\|^2)$
- Hesse: $f: U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig diffbar; $(Hess\ f)(x) := (D_i\ D_j\ f(x))_{1\leq i\leq n, \ 1\leq j\leq n}$
- Hesseform: $Q(h) := h^t((Hess\ f)(x))h$
  - * $q(x) > 0$ positiv definit $\to$ lokales Min
  - * $q(x) < 0$ negativ definit $\to$ lokales Max
  - * $q(x) < 0 < q(y)$ indefint $x, y \in \mathbb{R}^n \ \to$ kein Extremum
- Hurwitz $q(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j$; $det(A) > 0 \Rightarrow q(x)$ positiv definit
- $(Hess\ f)(x,y) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ mit $a := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $b := \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $c := \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$
- $a > 0, \ ac - b^2 > 0: \ (x,y) \ \to$ Min
- $a < 0, \ ac - b^2 > 0: \ (x,y) \ \to$ Max
- $ac - b^2 < 0: \ (x,y) \ \to$ Sattelpkt. (Kein Extremum)

Lokale Umkehrbarkeit

- $f'(a) \neq 0, \ f'(a) = Df(a), \ det(f'(a)) \neq 0 \ \Rightarrow$ Jacobi-Det regulär
- $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen $f: U \to V$ bijektiv
- $f^{-1} \circ f = id, \ (Df^{-1})(f(a))Df(a) = I_n$
- Satz von der lokalen Umkehrbarkeit: $f: U \to \mathbb{R}^n$ stetig diffbar, $a \in U \ f'(a)$ umkehrbar $\Rightarrow \ det f'(a) \neq 0$
  - * f injektiv auf V und $f(V)$ offen
  - * f^{-1} von $f: V \to f(V)$ ist stetig diffbar

Extremwerte unter Nebenbedingungen

- Sei $rgDf = k \ \forall\ x \in V$. Ist a ein lokales Extremum von F unter Nebenbedingungen, dann gilt $grad\ F(a) = \lambda_1 grad\ (f_1)(a) + \lambda_2 grad\ (f_2)(a) + \cdots + \lambda_k grad\ (f_k)(a)$ fuer gewisse $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k \in \mathbb{R}$. $f_i(x)$ ist die i-te Nebenbedingung als =0 umgeformt und als Funktion aufgefasst.
- Vorgehensschema: die k Nebenbedingungen ergeben zusammen mit der Gradientenbedingung $n+k$ Gleichungen; es gibt k unbekannte λ_i und der unbekannte Punkt a setzt sich aus n unbekanten Komponenten zusammen –> es ergibt sich ein $(n+k) \times (n+k)$ Gleichungssystem, dessen Lösung alle 'potentiellen Kandidaten' fuer Extrema sind. Man muss anschliessend noch pruefen, ob die 'kritischen Punkte' auch Extrema sind und die Art des Extremums bestimmen.

Ergänzungen

- surjektiv: limes links und rechts; Fkt. stetig; Zwischenwertsatz: jeder wert wird min einma angenommen
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $a_n \geq 0$ konvergiert genau dann, wenn Folge der Partialsummen (d.h. die Reihe) beschränkt ist.

ein paar Ableitungen:
$ln(x))' = \frac{1}{x}$
$(arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(arccos(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}$

Sinus-/Cosinus Hyperbolicus:
$sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
$cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

Ana II

- **Metrik:**
  - $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ $\quad d(y,x) \geq 0 \; \forall\, x,y \in \mathbb{R}$
  - $d(x,y) = d(y,x) \; \forall\, x,y$ (Symmetrie)
  - $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \; \forall\, x,y,z$ ($\triangle$-Ungleichung)
  - triviale Metrik: $d(x,y) = \begin{cases} 0, x=y \\ 1, x \neq y \end{cases}$
- **Norm:** (Abb. $V \to \mathbb{R}$)
  - $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
  - $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \; \forall\, x \in V, \lambda \in \mathbb{K}$
  - $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \; \forall\, x,y \in V$
  - Euklidische Norm: $\|x\| = \sqrt{\langle x,x \rangle} = \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}$
  - Maximums-Norm: $\|.\|_\infty := \max\{|x_1|, ..., |x_n|\}$ $\quad \|.\|_\infty \leq \|.\| \leq \sqrt{n}\|.\|_\infty$
  - Supremums-Norm: $\|f\|_x := \sup\{|f(x)| \mid x \in X\}$
  - im $\mathbb{R}^n$ sind 2 Nomen äquivalent
- Cauchy-Schwarz-Ungleichung: $a_n, b_n \in \mathbb{C}$: $\left|\sum_{j=1}^n a_j \overline{b_j}\right|^2 \leq \sum_{j=1}^n |a_j|^2 \cdot \sum_{j=1}^n |b_j|^2$

Topologische Grundbegriffe: (X,d) metrischer Raum, $E \subset X$
- Innerer Punkt: $\exists$ Umgebung U von a mit $U \subset E$
- Häufungspunkt: Jede ε-Umgebung von $a \in X$ enthält ein $(a \neq) b \in E$
- Isolierter Punkt: $a \in E$ und kein Häufungspunkt von E
- offen: jeder Punkt ist ein innerer Punkt von E (Bsp. für nicht offen: Folge mit Konvergenz auf Rand)
- abgeschlossen: jeder Häufungspunkt von E liegt in E
- E abgeschlossen $\Leftrightarrow$ Jede Folge x_n konvergiert in E mit GW $a = \lim x_n \in E$
- E dicht in X: jedes $a \in X$ Häufungspunkt oder Punkt von E (Bsp. $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}^n$)
- Randpunkt: in jeder Umgebung liegt ein Punkt von E als auch von $X \backslash E$
- beschränkt: endlicher Diameter
- Diam (U) $= \sup_{x,y \in U} \|x-y\| = \sup\{d(x,y) \mid x,y \in A\}$
- *kompakt*: in $K \subset \mathbb{R}^n$:
  - $\Leftrightarrow$ abgeschlossen und beschränkt (Heine-Borel)
  - $\Leftrightarrow$ jede unendl. Teilmenge von K hat Häufungspkt. in K
- *kompakt*: allgemein
  - $\Leftrightarrow$ jede offene Überdeckung hat endl. Teilüberdeckung (widerlegen mit Gegenbsp.)
  - $\Leftrightarrow$ jede Folge aus X konvergiert in X
  - $\underset{\neq}{\Rightarrow}$ beschränkt und abgeschlossen
- Kompaktheit überträgt sich auf abgeschl. Teilmengen
- Vollständigkeit: Jede Cauchy-Folge konvergiert (Gegenbsp. $\mathbb{Q}$; Bsp. $\mathbb{R}$)
- Sei X ein metrischer Raum. Dann gelten:
  - (i) $E \subset X$ ist offen \ abgeschlossen $\Longleftrightarrow$ E^c ist abgeschlossen \ offen.
  - (ii) $E \subset X$ offen $\Rightarrow$ nicht abgeschlossen
  - (iii) $\emptyset$ und X sind sowohl offen als auch abgeschlossen.
  - (iv) Für jede Familie $\mathcal{E} = \{E_j\}$ von offenen Mengen ist $\bigcup_j E_j$ offen;

    ist $\mathcal{E}$ endlich, so ist $\bigcap_{j=1}^n E_j$ offen.
  - (v) Für jede Familie $\mathcal{F} = \{F_k\}$ von abgeschlossenen Mengen ist $\bigcap_k F_k$ abgeschl;

    ist $\mathcal{F}$ endlich, so ist $\bigcup_{k=1}^n F_k$ abgeschlossen.
- Sei X ein metrischer Raum und $E \subset X$. Dann gilt
  1. $E \backslash \partial E$ ist offen (Rand: ∂E; abgeschl. Hülle: $\overline{E}$)
  2. $\overline{E} = E \cup \partial E$ ist abgeschlossen
  3. ∂E ist abgeschlossen
  4. $\mathring{E} := E \backslash \partial E$ Innere von E
  5. $E = \overline{E} \Leftrightarrow E$ ist abgeschlossen
  6. Für jede abgeschlossene Menge $F \subset X$ mit $E \subset F$ gilt $E \subset F$
- Insbesondere ist $\overline{E}$ die kleinste abgeschlossene Teilmenge von X, die E enthält.
- Einheitssphäre: $\mathbb{S}^{n-1} := \partial B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$

Konvergente Folgen
- (x_n) konvergiert gegen $a \in X$ [$\lim_{n\to\infty} x_n = a$], falls zu jedem $\varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$ mit $d(x_n, a) < \varepsilon \; \forall\, n \geq N$
- im vollständigen Raum konvergiert jede Cauchy-Folge
- Satz 2.4 (Intervall-Schachtelungsprinzip) (X,d) vollständiger metrischer Raum und $A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset ...$ eine absteigende Folge abgeschlossener Mengen $A_n \subset X \neq \emptyset$ mit $\lim_{n\to\infty} diam(A_n) = 0$, dann $\exists\, a \in A_0, ..., A_n$
- E ist vollkommen, wenn abgeschlossen und jeder Pkt. von E gleich Häufungspunkt von E [$E' = E$]
- Cantormenge: $C := \bigcap I_n$ ist abgeschl., beschränkt ($\Rightarrow$ kompakt), ausserdem nicht leer; C enthält keinen Iso-Pkt.; jedes $a \in C$ ist Häufungspunkt $\Rightarrow$ C ist vollkommen; C ist überabzählbar

Stetige Abbildungen
- f stetig im Pkt. $c \in X$, falls $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$
- f stetig auf X, falls f stetig in jedem $a \in X$
- $\delta-\varepsilon$-Kriterium: $f: X \to Y$ ist genau dann stetig in $a \in X$, wenn gilt:
  Zu jedem $\varepsilon > 0 \;\exists\; \delta > 0$, so dass $d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon \; \forall\, x \in X$ mit $d_X(x,a) < \delta$
- stetige Fkt. übertragen Offenheit/Abgeschlossenheit von Bild auf Urbild
- $f: X \to Y$ ist glm stetig $\Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\; \delta > 0$ mit $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon \; \forall\, x,y \in X$ mit $d_X(x,y) < \delta$
- $A: X \to Y$ linear, A stetig $\Leftrightarrow \|A(x)\|_Y \leq \underset{\geq 0}{c} \|x\|_X \; \forall\, x \in X \Leftrightarrow A$ beschränkt
- $f: x \to Y$ stetig auf ganz $X \Leftrightarrow f^{-1}(V)$ jeder offenen \ abgeschl. Menge $V \subset Y$ offen \ abgeschl. in X
- f stetig in $a \in X \Leftrightarrow$ Zu jeder Umgebung V von $f(a) \exists$ Umgebung U von a mit $f(V) \subset V$
- $f: x \to Y$ stetig, $K \subset X$ kompakt $\Rightarrow f(K) \subset Y$ kompakt

Polynome und Fixpkt.
- $f: X \to X$, $d(f(x), f(y)) \leq cd(x,y) \; \forall\, x,y \in X$ mit $c < 1$
  - $\Rightarrow f$ ist Kontraktion
  - $\Rightarrow f$ hat genau einen Fixpunkt $f(x^*) = x^*$

Kurven im $\mathbb{R}^n$:
- $\gamma: I = [a,b] \to \mathbb{R}^n$ injektiv, so heisst γ Bogen; gilt $\gamma(a) = \gamma(b)$ so ist die Kurve geschlossen
- Länge des Polygonzugs mit Ecken $\{\gamma(x_j)\}_j$ $\Lambda(\gamma, Z) = \sum_1^n \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\|$; $Z: t_0 = a < t_1 < ... < t_n = b$
- Länge von γ : $\Lambda(\gamma) = \sup_Z \Lambda(\gamma, Z)$ (wenn $\Lambda(\gamma) < \infty \Rightarrow \gamma$ rektifizierbar)
- Ist $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ stetig diffbar, so gilt γ rektifizierbar und $\Lambda(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt$
- regulär / nicht-singulär: $\gamma(t)$ stetig diffbar und $\gamma'(t) \neq 0$
- singulär: Wert t mit $\gamma'(t) = 0$

Jacobi-Matrix - Funktional-Matrix - Differential: regulär $\Leftrightarrow det(Df(x)) \neq 0$

Gradient und höhere Ableitung

$\nabla f(x) = gradf(x) := (\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(x))$

Richtungsableitung $D_v f(x) := \frac{d}{dt} f(x+tv) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t}$

$grad\; f(x) \neq 0 \Rightarrow$ Winkel Θ zw. Vektoren v und $grad\; f(x)$ definiert durch $\langle v, grad\; f(x) \rangle = \|grad\; f(x)\| \cos \Theta$

Niveaumenge: $N_f(c) := \{x \in U \mid f(x) = c\} \subset U \subset \mathbb{R}^n$; Menge aller x für die $f(x) - c = 0$

- Kritische Punkte: a ist KP $\Leftrightarrow$ grad $f(a) = 0$ (grad f : $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$) [notw. Bed für Extremum]

glm Konvergenz und Funktionfolgen
- pkt.weise Konvergent: Folge $(f_n(x))_n$ konvergiert für jedes x gegen $f(x)$ für festes $x (\in K)$ und alle $\varepsilon > 0 \;\exists\; N = N(x, \varepsilon)$ mit $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \; \forall\, n \geq N$
- glm Konvergent: $\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\; N = N(\varepsilon)$ mit $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \; \forall\, n \geq N \; \forall\, x$

Konvergenzradius von Potzenreihen: $\sum_{n=0}^\infty a_n x^n$
- $\varrho := \sup\{|z-a| \mid \sum_0^\infty a_n (z-a)^n$ konvergent$\}$
  - * $\varrho = 0 \Leftrightarrow$ Konvergenz ganau für $z = a$
  - * $\varrho = \infty$ uneingeschränkte Konvergenz
  - * $0 < \varrho < \infty$ $f(z) = \sum_0^\infty a_n (z-a)^n$ konvergiert glm auf jeder kompakten Teilmenge von $B_\varrho(a)$
- $\varrho = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ wenn existent und $a_n \neq 0 \; \forall\, n > N$