Prüfungsprotokoll Lineare Algebra Vordiplom
Prüfer: Prof. Dr. Uwe Helmke
Beisitzer: Dr. Gunther Dirr

Themen: Vektorräume, Basen (Steinitz), Gleichungssysteme, Lineare Abbildungen, Eigenwerte / -vektoren, Skalarprodukt, Selbstadjungierte Abbildungen

- Prof: Womit wollen sie denn beginnen? [*besser kanns ja nicht losgehen, oder?]*
- Ich: Üblich wäre, soweit ich aus den Prüfungsprotokollen sehen kann, mit Vektorräumen bzw. Basen
- Prof: Ok, schießen sie los
- Ich: *[bisschen was über die Definition von VR erzählt]*
- Prof: Was ist denn eine Basis?
- Ich: Ein minimales Erzeugendensystem bzw. eine maximale linear unabhängige Menge an Vektoren eines Vektorraums
- Prof: Das sind jetzt zwei verschiedene Definitionen, woher weiß man, dass beide zur selben Anzahl an Vektoren führen?
- Ich: Das geht aus dem Steinitzschen Austauschsatz hervor
- Prof: Was besagt der?
- Ich: *[gelaber]*
- Prof: Ok, angenommen ich habe hier 2 verschiedene Basen $V = (v_1, ..., v_n)$ und $W = (w_1, ..., w_m)$ wie geht aus dem Austauschsatz hervor, dass $m = n$?
- Ich: Der Austauschsatz besagt, dass es zu jedem Vektor, also z.B. zu w_1, einen Vektor v_i in V gibt, so dass das Erzeugnis von V ohne v_i geschnitten mit w_1 gleich dem Erzeugnis von V ist; damit erhalte ich eine neue Basis mit einem Vektor aus W, in der ich mit w_2 einen neuen Vektor eliminieren kann usw *[da bleiben meiner Meinung nach noch eine Menge Fragen offen, aber er war zufrieden]*
- Prof: Ok, zum Thema Gleichungssysteme: Wie lösen sie ein Gleichungssystem in Matrixschreibweise, also $Ax = b$, $A \varepsilon K^{nxm}$
- Ich: Nun, wenn m=n und A den vollen Rang hat, am einfachsten mit Gauß-Algorithmus
- Prof: Das bedeutet?
- Ich: *[blah blah, Zeilenumformungen, ..., hab mich wohl nicht allzu geschickt verkauft dabei]*
- Prof: Ok, das will ich jetzt mal in der Praxis sehen, lösen sie folgendes Gleichungssystem *[$M \varepsilon R^{3x2}$, also ein Faktor beliebig, ich löse mit etwas zittern, ist verdammt lang her das ich dass das letzte Mal gemacht hab]*
- Prof: Woher können sie wissen, dass sie mithilfe des Gauß-Algorithmus keine Lösungen „verlieren"?
- Ich: Weil bei den elementaren Zeilenumformungen der Rang der Matrix gleich bleibt, und der Rang gibt die Dimension des Bildes an
- Prof: Ok, kommen wir zu linearen Abbildungen; wir haben 2 Vektorräume, V und W, und eine lineare Abbildung $f: V \rightarrow W, x \rightarrow Ax$. Was muss die darstellende Matrix A erfüllen?
- Ich: *[ne Menge rumgestotter von mir, ich stand ziemlich auf dem Schlauch, habe anfangs versucht die Vektoren aus V mit den Vektoren aus W darzustellen, natürlich völliger Blödsinn. Am Ende steht auf jeden Fall da $v = \sum a_{ij} f(w)$ (natürlich auch Schwachsinn, da f für einen Vektor aus W nicht definiert ist), er zeigt mir die Lösung und belässt es dabei]*
- Prof: Na gut, nächstes Thema: Was für Eigenschaften haben Skalarprodukte?
- Ich: Bilinar, positiv definit, symmetrisch *[noch ein bisschen Gelaber aus Eigeninitiative, bei dem Thema fühlte ich mich besser, Prof hört zu ohne zu unterbrechen]*
- Prof: Ok, jetzt gibt es lineare Abbildungen, die bzgl. eines Skalarproduktes bestimmte Eigenschaften haben, z.B. selbstadjungierte Funktionen. Was ist ihre besondere Eigenschaft?
- Ich: $<x,f(y)> = <f(x), y>$
- Prof: Welche besondere Form haben die darstellende Matrizen von selbstadjungierten Abbildungen?

- Ich: Symmetrisch, also $A^T = A$
- Prof: Ok, und wenn ich ein “modifiziertes Skalarprodukt” mit der Eigenschaft $\langle x,f(y)\rangle = - \langle f(x), y\rangle$ hätte? Ich denke, dazu muss man etwas rechnen
- Ich: *[wenn er will, 2 Zeilen aufs Papier geschmiert, was soll schon rauskommen außer]* $xAy = -yA^Tx$ für beliebige $x,y \rightarrow A = -A$
- Prof: Wieso gilt die obige Folgerung?
- Ich: Die kurze Begründung ist wohl, dass das Skalarprodukt nicht entartet ist bezüglich x und y, genauer müsste man jetzt etwas rechnen *[bitte nicht, ich hab keine Ahnung]*
- Prof: *[kurzes Stutzen]* Ich denke, das reicht mir als Begründung *[JUUHHUUUUUU]* Kommen wir zu Eigenwerten *[schreibt eine Diagonalmatrix mit Lambdas aufs Blatt]*. Es gibt häufig Matrizen, dass eine gegebene Matrix A durch SAS^{-1} auf diese Form gebracht wird; was sind das für Werte?
- Ich: *[BliBlaBlubb, Eigenwerte, Eigenvektoren abgespult]*
- Prof: Ok, was genau hat ein Eigenvektor für eine Eigenschaft?
- Ich: Beim multiplizieren an die darstellende Matrix wird nur der Betrag, nicht die Richtung geändert
- Prof: Wie bestimmen sie die Eigenwerte einer Matrix?
- Ich: Mithilfe der Nullstellen charakteristischen Polynoms $\det(Ix-A)$
- Prof: Woher wissen sie, dass SAS^{-1} die gleichen Eigenwerte hat wie A?
- Ich: *[kurzes nachdenken]* Tut mir Leid, dazu fällt mir im Moment kein Ansatz ein
- Prof: Schreiben sie mal auf, was sie zeigen wollen
- Ich: *[schreibe $\det(Ix-SAS^{-1}) = \det(Ix-A)$ aufs Blatt, immer noch keine Idee]*
- Prof: *[erklärt mir was (hab schon wieder vergessen was, hoffentlich liest er das nicht^^) und ersetzt die Formel mit $\det(S(Ix-A)S^{1}) = \det(Ix-A)$]* Wieso ist das äquivalent?
- Ich: Aufgrund der Invertierbarkeit von S *[ACHTUNG, FEHLER VON MIR: Invertierbarkeit wird nicht benötigt, also nicht merken^^]* gilt $\det(S(Ix-A)S^{-1}) = \det(S) \det(Ix-A) \det(S^{-1}) = \det(Ix-A) \det(S) \det(S^{-1}) = \det(Ix-A) \det(I) = \det(Ix-A)$
- Beisitzer: Sie haben jetzt die Invertierbarkeit von S erwähnt, wird die benötigt?
- Ich: *[kurzes Nachdenken von mir, FALSCHE ANTWORT]* meiner Meinung nach ja
- Beisitzer: sicher, schauen sie sich das nochmals an?
- Ich: *[erneutes nachdenken]* Ich sollte jetzt wohl nein sagen, ich glaube aber immer noch dass ja
- Beisitzer: Die Invertierbarkeit wird nicht benötigt
- Ich: *[innerliches Verfluchen der eigenen Arroganz, aber zu spät]*

So, das wars, ca. 1 Minute draußen gewartet, erwartete Note: 3,x; erhaltene Note: 1,7 --> Super Bewertung. Die Stimmung war total entspannt, die Fragen meiner Meinung nach meist verständlich und wenn ich nicht weiter wusste, hat er immer sinnvolle Denkanstöße gegeben. Ich hatte den Eindruck, dass es ihm gefiel, wenn ich über eine Frage einen Moment nachgedacht habe, anstatt gleich drauflos zu erzählen, kommt bei ihm scheinbar als „verstanden“ an im Gegensatz zu „auswendig gelernt“, ist aber nur mein persönlicher Eindruck. Kann aus meiner Erfahrung nur Bedingungslos empfehlen, Helmke als Prüfer zu wählen, muss aber fairerweise erwähnen, dass einige aus meinem Jahrgang nicht so zufrieden waren.
Göö