Ana Zettel, Version 1.0

- **Integralfunktion 2 Veränderlicher**
  - Satz 6.3: Sei $T \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall mit $t_0 \in T$ und $f : A \times T \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften:
    a) $\forall t \in T$ ist $x \mapsto f(x,t)$ auf A lebesgue-integrierbar.
    b) $\forall x \in A$ ist $t \mapsto f(x,t)$ stetig.
    c) $\exists$ eine auf A integrierbare Funktion g mit $|f(x,t))| \leq g(x)$ $\forall t \in T$, $x \in A$
    Dann ist $F(t) := \int_A f(x,t)d\lambda(x)$ stetig.
  - Satz 6.4: Gilt a) und zusätzlich
    d) $\forall x \in A \; \exists \; \frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0)$
    e) $\exists$ Umgebung V von t_0 und integrierbare Funktion g, so dass $\forall t \in V \cap T$, $t \neq t_0$ gilt: $\left|\frac{f(x,t)-f(x,t_0)}{t-t_0}\right| \leq g(x)$ für fast alle $x \in A$
    Dann ist $F : T \to \mathbb{R}$, $F(t) = \int_A f(x,t)d\lambda(x)$ differenzierbar in t_0, $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0)$ ist integrierbar und es gilt $F'(t_0) = \int_A \frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0)d\lambda(x)$.
- **Integral**
  - Substitutionsregel: Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und $\phi : [a,b] \to I$ stetig differenzierbar. Dann gilt
$$\int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)dt = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)dx$$
  - Partielle Integration: Es seien $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann gilt
$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\,|_{x=a}^{b} - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$
  - **Transformationsformel**: $U,V \in \mathbb{R}^n$, $g : U \to V$ Diffeomorphismus, $f : V \to \mathbb{R}$ integrierbar.
$$\Rightarrow \int_V f(y)dy \;=\; \int_U f(g(x)) \cdot |det(g'(x))|\,dx$$
  - Diffeomorphismus: $g : U \to V$ bijektiv, g^{-1} stetig differenzierbar
  - f uneigentlich Lebesgue-integrierbar $\Leftrightarrow$ der Betrag von f uneigentlich Riemannintegrierbar ist;
  - **Fubini-Tonelli**: Funktion Lebesgue-integrierbar $\Rightarrow$ Integrale vertauschbar;
$$\int_{A\times B} f(x,y)d(x,y) = \int_A \int_B f(x,y)dxdy = \int_B \int_A f(x,y)dydx$$
  - einige Integrale:
    * $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = ln(f(x))$
    * $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2)dx = \sqrt{\pi}$
    * $\int_0^{\pi} sin^2(t)dt \;=\; \frac{\pi}{2}$
    * $\int sin(x) \cdot cos(x)dx \;=\; -\frac{1}{2}cos^2(x)$
    * $\int sin^2(kx) \;=\; \frac{1}{2}x - \frac{sin(2kx)}{4k}$ $\qquad \int cos^2(kx) \;=\; \frac{1}{2}x + \frac{sin(2kx)}{4k}$
    * $\forall a < 0 :$ $\qquad \int_0^{\infty} \exp(ax)sin(bx)dx = \frac{b^2}{a^2+b^2}$ $\qquad \int_0^{\infty} \exp(ax)cos(bx)dx = -\frac{a}{b^2+a^2}$
    * $\int_0^{\infty} sin(x)\exp(-sx)dx = \frac{1}{1+s^2}$
    * $\int \frac{x^2}{1+x^2} \;=\; x - arctan(x)$
    * $\int_0^1 cos(bx)db = \frac{sin(x)}{x}$ $\qquad \int_0^{\infty} \frac{sin(x)}{x} = \frac{\pi}{2}$ - Riemanintegrierbar, aber nicht Lebesgue;
    * Gammafunktion: $\Gamma(t) = \int_0^{\infty} x^{t-1}\exp(-x)dx$; $\Gamma(n) = (n-1)!\ \forall n \in \mathbb{N}$
  - ein paar Ableitungen:
    * $(ln(x))' = \frac{1}{x}$; $(arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $(arccos(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $(arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}$;
  - **Prinzip von Cavalieri**:
    gegeben 2 'Körper' $A,B \subset \mathbb{R}^n$ mit Volumen
$$\lambda(A) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_A d\lambda, \lambda(B) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_B d\lambda$$
    wenn $A_x = \{y \in \mathbb{R}^{n-1} : (x,y) \in A\}$ und $B_x = \{y \in \mathbb{R}^{n-1} : (x,y) \in B\}$ für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ das selbe Volumen haben, gilt $\lambda(A) = \lambda(B)$
    $Vol_M = \lambda(M) = \int_M \chi_M d\lambda (= \int_M 1 d\lambda)$

- **Satz von Stokes**:
  Ist ψ eine k-Kette der Klasse C^2 in einer offenen Menge $V \subset \mathbb{R}^m$ und ist ω eine (k-1)-Form der Klasse C^1(einmal stetig diffbare Funktionen) in V, dann gilt (wobei $\partial\psi$ der Rand von psi ist):

$$\int_\psi d\omega = \int_{\partial\psi} \omega$$

  * k-Form: $\omega = \sum_I b_I(x) dx_I$
  * $d\omega = \sum_I (db_I) \wedge dx_I$ (eine (k+1)-Form)
  * k-Fläche: in V ist eine $\mathcal{C}^1$ Abb von einer kompakten Menge $D \subset \mathbb{R}^k$ in V
  * k-Kette Γ: Familie endlich vieler orientierter k-Simplizes; $\int_\Gamma \omega = \sum_1^n \int_{D_i} \omega$
  * k-Simplex: $u = \sum_1^k u_i \cdot e_i \; mit \; 0 \leq u_i \; und \; \sum_i^k u_i \leq 1$ (Intervall, Dreieck, Tetraeder)

- **geschlossene und exakte Formen**

  Sei ω eine k-Form.
  - ist ω von der Klasse $\mathcal{C}^1$ und $d\omega = 0 \Rightarrow \omega$ geschlossen
  - gibt es eine (k+1)-Form λ mit $\omega = d\lambda \Rightarrow \omega$ exakt
  - (Satz 11.1): $d(\omega \wedge \lambda) = (d\omega) \wedge \lambda + (-1)^k \omega \wedge (d\lambda)$ ω k-Form, λ l-Form; $d^2\omega := d(d\omega) = 0$
  - $\omega \wedge \lambda = \sum_I \sum_J b_I(x) c_J(x) dx_I \wedge dx_J$ mit $\omega = \sum_I b_I(x) dx_I, \lambda = \sum_J c_J(x) dx_J$
    $\Rightarrow d(\omega \wedge \lambda) \neq d\omega \wedge d\lambda$
  - (k+1)-Form im $\mathbb{R}^k$ ist immer Null

- **Koordinatentransformation**
  - Polar (r, φ) : $x = r \cdot cos\varphi; \; y = r \cdot sin\varphi; \; 0 \leq r \leq \sqrt(x^2 + y^2); \; 0 \leq \varphi \leq 2\pi;$
    Jacobi-Determinante der Transformation: r;
  - Zylinder (r, φ, z): $x = r \cdot cos\varphi; \; y = r \cdot sin\varphi; \; z = z; \; 0 \leq r \leq \sqrt(x^2 + y^2); \; 0 \leq \varphi \leq 2\pi;$
    Jacobi-Determinante der Transformation: r;
  - Kugel (r, θ, φ): $x = r \cdot sin\theta \cdot cos\varphi; \; y = r \cdot sin\theta \cdot sin\phi; \; z = r \cdot cos\theta; \; 0 \leq r \leq \sqrt(x^2 + y^2 + z^2); \; 0 \leq \varphi \leq 2\pi \; 0 \leq \theta \leq \pi;$
    Jacobi-Determinante der Transformation: $r^2 \cdot sin\theta$;
  - Jacobi-Matrix: $Df = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}; \; a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j};$

- **Additionstheoreme/Trigonometrie**:
  - $cos(x + y) = cos(x)cos(y) - sin(x)sin(y);$
  - $sin(x + y) = cos(x)sin(y) + sin(x)cos(y);$
  - $sin(x) - sin(y) = 2 \cdot cos(\frac{x+y}{2}) sin(\frac{x-y}{2});$
  - $sin(2x) = 2sin(x) \cdot cos(x)$
  - $cos^2(t) \cdot sin^2(t) = \frac{1}{4} sin^2(2t)$
  - $cos(x) = \frac{1}{2}(\exp(ix) + \exp(-ix)),$
    $sin(x) = \frac{1}{2i}(\exp(ix) - \exp(-ix))$
  - $cos(-x) = cos(x)$, $sin(-x) = -sin(x)$ (cos achen-sym., sin punkt-sym.)
  - $cos(x) = sin(\frac{\pi}{2} - x)$, $sin(x) = cos(\frac{\pi}{2} - x)$

- Satz von Schwarz: f 2 mal stetig partiell diffbar $\Rightarrow$ Vertauschbarkeit der part. Ableitungen
  .
$$\frac{\partial f^2(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial f^2(x, y)}{\partial y \partial x}$$

- **Nullmengen**
  = Teilmenge des Maßraumes mit Maß=0
  - kann überabzählbar viele Elemente enthalten
  - jede abzählbare Menge ($\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$)
  - Bsp. für überabzählbare Nullmengen i. d. Menge d. reellen Zahlen: Cantormenge
  - abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen ist wieder abzählbar;