Prof. Dr. Jörn Steuding, Dipl.-Math. Peter Meier
Institut für Mathematik, Universität Würzburg

7. Juli 2008

ANALYSIS IV — Klausur

Aufgabe 1 (3+4+3 Punkte). *Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen:*

(i) $y' = 2y\frac{x}{1-x^2}$ *mit der Anfangsbedingung* $y(0) = \frac{1}{2}$;
(ii) $y' = (y+x)^2$;
(iii) $y' = y\cos(x)\sin(x)$ *mit der Anfangsbedingung* $y(0) = 2$.

Aufgabe 2 (5+3+2 Punkte). *Für* $x \in [-\pi, \pi]$ *sei* $f(x) := |\sin(x)|$.

(i) *Berechnen Sie die Fourier-Reihe von* f:

$$|\sin(x)| \quad \sim \quad \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2kx)}{4k^2-1}.$$

(ii) *Wird* f *durch ihre Fourier-Reihen dargestellt? Wenn ja, warum?*
(iii) *Zeigen Sie*

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{1\cdot 3} - \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} \mp \ldots.$$

Aufgabe 3 (2+2+2+2+2 Punkte). *Wahr oder falsch? Geben Sie eine kurze Begründung!*

(i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ *ist die Fourier-Reihe einer quadratisch-integrierbaren Funktion.*
(ii) *Für jede einfach geschlossene ebene Kurve* γ *mit stückweise stetig differenzierbarer Parametrisierung der Länge* $L > 0$ *und Flächeninhalt* A *besteht die Ungleichung* $L^2 \geq 2\pi A$.
(iii) *Jede stetige periodische Funktion wird durch ihre Fourier-Reihe dargestellt.*
(iv) *Durch jeden Punkt des ersten Quadranten* $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$ *geht genau eine Lösung der Differentialgleichung* $y' = \frac{x}{y}$.
(v) *Eine integrierbare Funktion* $f : (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$ *ist genau dann gerade, wenn die zugehörige Fourier-Reihe keine Cosinus-Terme enthält.*

Aufgabe 4 (2+8 Punkte). *Es sei* $\alpha > 0$ *und* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \exp(-\alpha|x|)$.

(i) *Ist* f *auf* $\mathbb{R}$ *integrierbar?*
(ii) *Berechnen Sie die Fourier-Transformierte von* f; *zeigen Sie für* $x > 0$

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos(xy)}{y^2+\alpha^2}\,dy = \frac{\pi}{2\alpha}\exp(-\alpha x).$$

Aufgabe 5 (4+6 Punkte).

(i) *Sei* $F(z) := \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ *eine für* $|z| < 1$ *konvergierende Potenzreihe. Speziell für* $z = r\exp(ix)$ *mit festem* $r \in (0,1)$ *gilt*

$$f(x) := F(r\exp(ix)) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k r^k \exp(ikx).$$

Zeigen Sie, dass rechts die Fourier-Reihe von f *steht.*
(ii) *Stellen Sie für* $r \in (0,1)$ *die Funktion*

$$f(x) := \frac{1 - r\cos x}{1 + r^2 - 2r\cos x} \qquad \text{für} \quad 0 < x \leq 2\pi$$

durch ihre Fourier-Reihe dar.

Für das Bestehen der Klausur reichen 20 Punkte sicher aus. **Viel Spaß!**

Name: ______ **Punkte:** ____

Lösungen : Klausur ANA IV

Aufgabe 1. i) $\frac{y'}{y} = 2\frac{x}{1-x^2}$ ist DGL mit getrennten Variablen; Satz 3.1 der Vorlesung liefert

$$\log y = \int \frac{y'}{y}\,dy = \int 2\frac{x}{1-x^2}\,dx = -\int \frac{f'}{f}(x)\,dx \quad \text{mit } f(x) = 1-x^2$$
$$= -\log f + c, \quad c \text{ konstant.}$$

Also $y(x) = \exp(c - \log(1-x^2)) = \exp(c)\frac{1}{1-x^2}$; die Anfangsbedingung fordert $c = -\log 2$.

ii) Substitution $u(x) = y(x) + x$ führt auf $u' = y' + 1 = u^2 + 1$. Dies ist wiederum eine DGL, die mit Satz 3.1 behandelt werden kann:

$$x + c = \int dx = \int \frac{du}{u^2+1} = \arctan(u).$$

Bzw. $u = \tan(x+c)$ mit einer Konstanten c. Also folgt $y(x) = \tan(x+c) - x$.

iii) Wie bereits in i) und ii) mit Satz 3.1

$$\log y = \int \frac{y'}{y}\,dy = \int \cos x \sin x\,dx = \int \left(\tfrac{1}{2}\sin^2 x\right)' dx$$
$$= \tfrac{1}{2}\sin^2 x + c$$

mit einer Konstanten c. Also

$$y(x) = \exp\left(\tfrac{1}{2}\sin^2 x + c\right)$$

und die Anfangsbedingung fordert hier $c = \log 2$.

2. Lösung: $2\cdot\exp\left(-\frac{1}{4}\cos 2x + \frac{1}{4}\right)$

Aufgabe 2. i): $f(x) = |\sin x|$ ist gerade, die Fourier-Reihe enthält also nur Cosinus-Terme. Für ungerade $n \in \mathbb{N}$ berechnet sich der Fourier-Koeffizient wie folgt:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin x| \cos(nx)\, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cos(nx)\, dx$$

Hierin liefert partielle Integration

$$\int \sin x \cos(nx)\, dx = \frac{1}{n^2-1}\left(\cos x \cos(nx) + n \sin x \sin(nx)\right),$$

so dass also für $n = 2k$ ($k \in \mathbb{N}$)

$$a_{2k} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{4k^2-1}\left(-1+0-1-0\right) = -\frac{4}{\pi}\frac{1}{4k^2-1};$$

für ungerade n kommt $a_n = \frac{2}{\pi}\frac{1}{n^2-1}(+1+0-1-0) = 0$.

Also

$$|\sin x| \sim \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2kx)}{4k^2-1}.$$

(Man beachte hierbei, dass die Formel für a_{2k} auch für $k=0$ gilt mit einem zusätzlichen Faktor $\frac{1}{2}$ nach Def.)

ii) Die Fourier-Reihe stellt f dar, z.B. nach Satz 10.2, da die Fourier-Koeffizienten $|a_n| \leq \frac{C}{n}$ mit einer Konstanten C genügen (die b_n sind ja sowieso alle gleich Null). Die Konvergenz der Fourier-Reihe ist damit gleichmäßig.

iii) Die Reihendarstellung für $\frac{\pi}{4}$ folgt sofort aus der Fourier-Reihenentwicklung mittels $x = \frac{\pi}{2}$.

Aufgabe 3.

i) falsch, sonst würde die harmonische Reihe nach der Parsevalschen Glg. (Korollar 9.2) konvergieren.

ii) wahr; nach der isoperimetrischen Ungleichung (Satz 11.3) gilt ja sogar $L^2 \geq 4\pi A$.

iii) falsch; man denke etwa an das Beispiel von Fejér (aus Kapitel 10).

iv) richtig; die allgemeine Lösung dieser DGL ist $y(x) = \sqrt{x^2+c}$ mit passenden Konstanten c, d.h. zu gegebenen $x, y > 0$ ist also c gemäß $c = y^2 - x^2$ zu wählen (Bsp. 3, ii) der Vorlesung).

v) falsch, denn der Sinus ist ungerade (genau das Gegenteil ist richtig).

Aufgabe 4. i) f ist Element des Schwartzschen Raums und also integrierbar (klar).

ii) Die Berechnung der Fourier-Transformierten:

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left(\cos(xy) - i \sin(xy)\right) dx$$

Das Integral über den Sinus-Term verschwindet, da $\exp(-\alpha|x|) \sin(xy)$ ungerade ist. Also

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha|x|) \cos(xy)\, dx$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} \exp(-\alpha|x|) \cos(xy)\, dx .$$

Nennen wir das auftretende Integral I, so liefert partielle Integration

$$I = -\frac{1}{\alpha} \exp(-\alpha x) \cos(xy) + \frac{y}{\alpha^2} \exp(-\alpha x) \sin(xy) - \frac{y}{\alpha^2} I$$

bzw.

$$I\left(1 + \frac{y^2}{\alpha^2}\right) = \frac{1}{\alpha^2} \exp(-\alpha x)\left(y \sin(xy) - \alpha \cos(xy)\right).$$

Letztendlich kommt

$$\hat{f}(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{y \sin(xy) - \alpha \cos(xy)}{\alpha^2 + y^2} \exp(-\alpha x) \Big|_{x=0}^{+\infty}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{\alpha}{\alpha^2 + y^2}.$$

Mit dem Umkehrsatz 13.1 folgt ähnlich wie oben für $x > 0$

$$\exp(-\alpha x) = f(x) = \hat{\hat{f}}(-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(-y) \exp(ixy)\, dy$$

$$= \frac{2\alpha}{\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{\cos(xy)}{\alpha^2 + y^2}\, dy ,$$

was unmittelbar auf die zu beweisende Formel führt.

$\checkmark 4$

Aufgabe 5. i) Nach Voraussetzung besteht für $x \in [0, 2\pi)$ die Reihenentwicklung

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k r^k \{\cos(kx) + i \sin(kx)\}.$$

Also besitzt f eine Darstellung als trigonometrische Reihe. Nach dem Eindeutigkeitssatz 9.4 ist dies die Fourier-Reihe der (als Potenzreihe) stetigen Funktion f.

ii) Mit der geometrischen Reihe und $z = r\exp(ix)$ für $r \in (0,1)$ gilt

$$f(x) = \frac{1 - r\cos x}{1 + r^2 - 2r\cos x} = \mathrm{Re}\, \frac{1 - \bar{z}}{(1-z)(1-\bar{z})} = \mathrm{Re}\, \frac{1}{1-z}$$

$$= \mathrm{Re} \sum_{k=0}^{\infty} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} r^k \cos(kx).$$

Nach i) ist dies die Fourier-Reihenentwicklung von f.

/5