

ANALYSIS IV — Klausur

Aufgabe 1 (3+4+3 Punkte). Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen:

- (i) $y' = 2y\sqrt{1-x^2}$ mit der Anfangsbedingung $y(0) = \frac{1}{2}$;
- (ii) $y' = (y+x)^2$;
- (iii) $y' = y \cos(x) \sin(x)$ mit der Anfangsbedingung $y(0) = 2$.

Aufgabe 2 (5+3+2 Punkte). Für $x \in [-\pi, \pi]$ sei $f(x) := |\sin(x)|$.

- (i) Berechnen Sie die Fourier-Reihe von f :

$$|\sin(x)| \sim \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2kx)}{4k^2 - 1}$$

- (ii) Wird f durch ihre Fourier-Reihen dargestellt? Wenn ja, warum?
- (iii) Zeigen Sie

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} - \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots$$

Aufgabe 3 (2+2+2+2+2 Punkte). Wahr oder falsch? Geben Sie eine kurze Begründung!

- (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ ist die Fourier-Reihe einer quadratisch-integrierbaren Funktion.
- (ii) Für jede einfach geschlossene ebene Kurve γ mit stückweise stetig differenzierbarer Parametrisierung der Länge $L > 0$ und Flächeninhalt A besteht die Ungleichung $L^2 \geq 2\pi A$.
- (iii) Jede stetige periodische Funktion wird durch ihre Fourier-Reihe dargestellt.
- (iv) Durch jeden Punkt des ersten Quadranten $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$ geht genau eine Lösung der Differentialgleichung $y' = \frac{x}{y}$.
- (v) Eine integrierbare Funktion $f : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann gerade, wenn die zugehörige Fourier-Reihe keine Cosinus-Terme enthält.

Aufgabe 4 (2+8 Punkte). Es sei $\alpha > 0$ und $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) := \exp(-\alpha|x|)$.

- (i) Ist f auf \mathbb{R} integrierbar?
- (ii) Berechnen Sie die Fourier-Transformierte von f ; zeigen Sie für $x > 0$

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(xy)}{y^2 + \alpha^2} dy = \frac{\pi}{2\alpha} \exp(-\alpha x)$$

Aufgabe 5 (4+6 Punkte).

- (i) Sei $F(z) := \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ eine für $|z| < 1$ konvergierende Potenzreihe. Speziell für $z = r \exp(ix)$ mit festem $r \in (0, 1)$ gilt

$$f(x) := F(r \exp(ix)) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k r^k \exp(ikx)$$

Zeigen Sie, dass rechts die Fourier-Reihe von f steht.

- (ii) Stellen Sie für $r \in (0, 1)$ die Funktion

$$f(x) := \frac{1-r \cos x}{1+r^2-2r \cos x} \quad \text{für } 0 < x \leq 2\pi$$

durch ihre Fourier-Reihe dar.

Für das Bestehen der Klausur reichen 20 Punkte sicher aus.

Name: _____ Punkte: _____

Viel Spaß!

Lösungen: Klausur ANA IV

Aufgabe 1. i) $\frac{y'}{y} = 2 \frac{x}{1-x^2}$ ist DGL mit getrennten Variablen; Satz 3.1 der Vorlesung liefert

$$\log y = \int \frac{y'}{y} dy = \int 2 \frac{x}{1-x^2} dx = - \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx \quad \text{mit } f(x) = 1-x^2$$

$$= -\log f + c, \quad c \text{ konst.}$$

Also $y(x) = \exp(c - \log(1-x^2)) = \exp(c) \frac{1}{1-x^2}$; die Anfangsbedingung fordert $c = -\log 2$.

ii) Substitution $u(x) = y(x) + x$ führt auf $u' = y' + 1 = u^2 + 1$. Dies ist wiederum eine DGL, die mit Satz 3.1 behandelt werden kann:

$$x + c = \int dx = \int \frac{du}{u^2 + 1} = \arctan(u)$$

(zu. $u = \tan(x+c)$ mit einer Konstanten c . Also folgt $y(x) = \tan(x+c) - x$.

iii) Wie bereits in i) und ii) mit Satz 3.1

$$\log y = \int \frac{y'}{y} dy = \int \cos x \sin x dx = \int \left(\frac{1}{2} \sin^2 x \right)' dx$$

$$= \frac{1}{2} \sin^2 x + c$$

mit einer Konstanten c . Also

$$y(x) = \exp\left(\frac{1}{2} \sin^2 x + c\right)$$

und die Anfangsbedingung fordert hier $c = \log 2$.

2. Lösung: $2 \cdot \exp\left(-\frac{1}{4} \cos 2x + \frac{1}{4}\right)$

Aufgabe 2. i): $f(x) = |\sin x|$ ist gerade, die Fourier-Reihe enthält also nur Cosinus-Terme. Für ungerade $n \in \mathbb{N}$ berechnet sich der Fourier-Koeffizient wie folgt:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin x| \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cos(nx) dx$$

Hierin liefert partielle Integration

$$\int \sin x \cos(nx) dx = \frac{1}{n^2-1} (\cos x \cos(nx) + n \sin x \sin(nx)),$$

so dass also für $n = 2\ell$ ($\ell \in \mathbb{N}$)

$$a_{2\ell} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{4\ell^2-1} (-1+0-1-0) = -\frac{4}{\pi} \frac{1}{4\ell^2-1}$$

für ungerade n kommt $a_n = \frac{2}{\pi} \frac{1}{n^2-1} (+1+0-1-0) = 0$.
Also

$$|\sin x| \sim \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\cos(2\ell x)}{4\ell^2-1}$$

(Man beachte hierzu, dass die Formel für $a_{2\ell}$ auch für $\ell=0$ gilt mit einem ergänzenden Faktor $\frac{1}{2}$ nach Def.)

ii) Die Fourier-Reihe stellt f dar, z.B. nach Satz 10.2, da die Fourier-Koeffizienten $|a_n| \leq \frac{c}{n}$ mit einer Konstanten c genügen (die b_n sind ja sowieso alle gleich Null). Die Konvergenz der Fourier-Reihe ist dann mit Gleichmäßigkeit.

iii) Die Reihe darstellt für $\frac{\pi}{4}$ folgt sofort aus der Fourier-Reihenentwicklung mittels $x = \frac{\pi}{2}$.

Aufgabe 3.

i) falsch, sonst würde die harmonische Reihe nach der Partialsummen Folg. (Kawallas 3.2) konvergieren.

ii) wahr; nach der isoperimetrischen Ungl. (Satz 11.3) gilt ja sogar $L \geq 4\sqrt{A}$.

iii) falsch; man denke etwa an das Beispiel von Fejér (aus Kapitel 10).

iv) richtig; die allgemeine Lösung dieser DGL ist $y(x) = \sqrt{x^2+c}$ mit passendem konstanten c , d.h. zu gegebenen $x, y > 0$ ist also c gemäß $c = y^2 - x^2$ zu wählen (Bsp. 3, ii) der Vorlesung).

v) falsch, denn der Sinus ist ungerade (genau das Gegenteil ist richtig).

Aufgabe 4. i) f ist Element des Schwartzschen Raums und also integrierbar (klar).

ii) Die Berechnung des Fourier-Transformierten:

$$\hat{f}(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) (\cos(xy) - i \sin(xy)) dx$$

Das Integral über den sinus-Term verschwindet, da $\exp(-a|x|) \sin(xy)$ ungerade ist. Also

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha|x|) \cos(xy) dx$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \exp(-\alpha|x|) \cos(xy) dx$$

Nennen wir das auftretende Integral I, so liefert partielle Integration

$$I = -\frac{1}{\alpha} \exp(-\alpha x) \cos(xy) + \frac{y}{\alpha^2} \exp(-\alpha x) \sin(xy) - \frac{y}{\alpha^2} I$$

Bew.

$$I \left(1 + \frac{y^2}{\alpha^2}\right) = \frac{1}{\alpha^2} \exp(-\alpha x) (y \sin(xy) - \alpha \cos(xy))$$

Letztendlich kommt

$$\hat{f}(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{y \sin(xy) - \alpha \cos(xy)}{\alpha^2 + y^2} \exp(-\alpha x) \Big|_{x=0}^{+\infty}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\alpha}{\alpha^2 + y^2}$$

Mit dem Umkehrsatz 13.1 folgt ähnlich wie oben für $x > 0$

$$\exp(-\alpha x) = f(x) = \hat{f}(-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(-y) \exp(iy) dy$$

$$= \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos(xy)}{\alpha^2 + y^2} dy,$$

was unmittelbar auf die zu beweisende Formel führt.

Aufgabe 5. i) Nach Voraussetzung besteht für $x \in [0, 2\pi]$ die Reiheentwicklung

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} r^k \{ \cos(kx) + i \sin(kx) \}.$$

Also besitzt f eine Darstellung als trigonometrische Reihe. Nach dem Eindeutigkeitsatz 9.4 ist dies die Fouriers-Reihe von f (als Potenzreihe) stetigen Funktion f.

ii) Mit der geometrischen Reihe und $z = r \exp(ix)$ für $r \in (0, 1)$ gilt

$$f(x) = \frac{1 - r \cos x}{1 + r^2 - 2r \cos x} = \operatorname{Re} \frac{1 - \bar{z}}{(1 - \bar{z})(1 - z)} = \operatorname{Re} \frac{1}{1 - z}$$

$$= \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{\infty} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} r^k \cos(kx).$$

Nach i) ist dies die Fouriers-Reihenentwicklung von f.